1 тур

9 класс

1. (3 балла) Является ли число 3000 разностью кубов двух натуральных чисел?

Ответ: Нет, не является.

Решение: Действительно, из равенства

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy) = (x - y)((x - y)^2 + 3xy)$$

следует, что разность кубов двух натуральных чисел либо делится на 9, либо не делится на 3. Но 3000 делится на 3 и не делится на 9.

2. (5 баллов) Сумма неотрицательных чисел a,b,c,d равна 1. Доказать, что тогда $4 \le \frac{1}{ab+bc+cd+da}$

Решение:

$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = (a + c)(1 - a - c) = \frac{1}{4} - (a + c - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$.

3. (7 баллов) Вася произвольным образом отметил несколько красных и синих точек в клетках таблицы 4×4. Петя подсчитал, что в каждом квадрате 3×3 красных точек больше чем синих, но Вася уверен, что всего отметил синих точек больше чем красных. Могли ли оба мальчика оказаться правыми?

Ответ: да, могли. Например, отметил на одной из клеток центрального квадрата 2 × 2 девять красных точек, а на остальные клетках — по одной синей. Тогда в каждом квадрате 3 × 3 будет 9 красных точек и 8 синих, а на всей доске — 15 синих и 9 красных.

4. (10 баллов) На столе лежат 2014 монет. Аркадий и Борис играют в игру: по очереди берут себе монеты. Своим ходом Аркадий берёт 1 или 40 монет, а Борис — 1 или 5. Первым ходит Аркадий. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Ответ: Аркадий.

Одна из возможных стратегий: Первым ходом Аркадий должен взять 40 монет, а в дальнейшем, после любого хода Бориса брать каждый раз одну монету. В этом случае, после каждого хода Бориса на столе будет оставаться нечетное количество монет. Так как количество монет на столе постепенно будет уменьшаться, то неизбежно настанет момент, когда под елкой останется одна монета. Взяв ее, Аркадий выиграет.

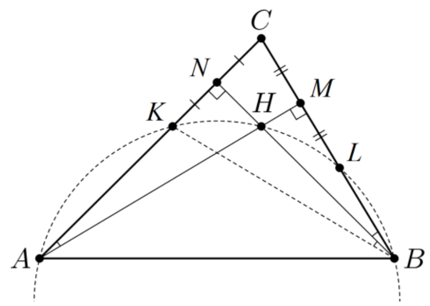
5. (10 баллов) Остап купил на складе яблоки и продал их на рынке с прибылью в 500 рублей. На все вырученные деньги он снова купил на складе яблоки и продал на рынке. На этот раз прибыль составила 600 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Решение: Пусть Остап заплатил при первой покупке на складе за яблоки x рублей. Тогда он продал ее на рынке за $x + 500$ рублей. Во второй раз он потратил на складе $x + 500$ рублей, а выручил на рынке x+500+600 = x+1100 рублей. Так как соотношение складской и рыночной цен не изменилось, составим пропорцию:

$\frac{x}{x+500} = \frac{x+500}{x+1100}$.

Решив уравнение, получим $x = 2500$.

6. (10 баллов) Высоты AM и BN остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках K и L соответственно. Найдите KL, если NM = 15 см.



Ответ: 30 см.

Решение: Пусть ∠ HBK = *x*. Тогда ∠ KAH = ∠ HBK = *x* (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из прямоугольного треугольника AMC: ∠C= 90, а из прямоугольного треугольника ΔECB: ∠NBC = 90 – ∠C = *x*. Таким образом, BN – высота и биссектриса треугольника ΔKBC, следовательно, этот треугольник равнобедренный и BN является его медианой, то есть KN = NC. Аналогично доказывается, что CM = ML. Значит, NM – средняя линия треугольника ΔKCL. Поэтому KL = 2NM = 30 см.

7. (12 баллов) *В выпуклом четырехугольнике ABCD биссектриса угла A проходит через точку C, а биссектриса угла B — через точку D. Кроме того, AB* = 40, BC = 30 и AD = 20. *Сколько таких четырехугольников существует ?*

Решение: Один. Достроим четырехугольник до треугольника AMB. Вершина M может оказаться с разных сторон от AB (там же, где C и D или с другой стороны). В первом случае обозначим CM = x, DM = y. По теореме о биссектрисе треугольника 40 : 30 = (20 + y) : x, 40 : 20 = (30 + x) : y. Следовательно, x = 42, y = 36 и такой треугольник существует, а четырехугольник однозначно по нему восстанавливается.

Во втором случае обозначим *AM* = x, *BM = y. По свойству внешних углов биссектрис имеем*

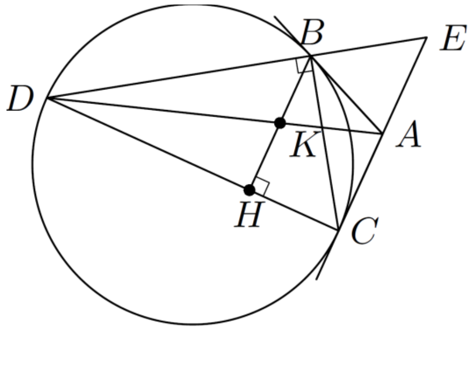
(20 + x) : 20 = y : 40, (30 + y) : 30 = x : 40. Тогда x = -28, y = -36. Противоречие.

8. (13 баллов) В клетки доски 8×8 посадили 32 красных и 32 синих хамелеона в шахматном порядке. Каждую секунду один из хамелеонов меняет свой цвет на цвет одного из своих соседей (соседями считаются хамелеоны, сидящие в клетках, имеющих общую сторону). Могут ли через день все хамелеоны поменять свой цвет с первоначального на противоположный?

Ответ: нет.

Решение: Пусть все смогли поменять свой цвет. Рассмотрим хамелеона H, который поменял свой цвет последним. К моменту смены цвета все остальные хамелеоны уже изменили свой цвет. Значит, в этот момент, все соседи H – одного с ним цвета, и он изменить свой цвет не может.

9. (15 баллов) На катете *CD*, прямоугольного треугольника *CDE*, как на диаметре построена окружность. Гипотенуза треугольника *DE* пересекает окружность в точке *B*. Касательная к окружности в точке *B* пересекает катет *CE* в точке *A*. Высота *BH* треугольника BDC пересекает отрезок *AD* в точке *K*. Найдите отношение *BK* : *KH*.



Ответ: 1.

Решение: Так как *CD* — диаметр, проведенный в точку касания окружности с прямой *AC,* то $CD \perp AC$ и, следовательно, $BH \parallel AC$. Углы *CBD* и *CBE* прямые, поскольку *CD* – диаметр. В прямоугольном треугольнике *ECB* точка *A* гипотенузы равноудалена от *B* и *C* (поскольку *AB* и *AC* – касательные к окружности). Поэтому она является серединой стороны *EC* (так как лежит на серединном перпендикуляре к *BC,* являющемся средней линией треугольника *ECB).* Следовательно, прямая *AD* делит отрезок *CE* пополам. Тогда она делит пополам и параллельный ему отрезок *BH.*

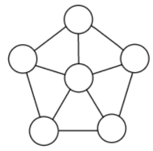
10. (15 баллов) На доске написаны многочлены $x+1$ и x^2+1. Разрешается дописывать на доску многочлен *f*, равный сумме, разности или произведению любых двух различных из написанных многочленов, если многочлен *f* не был выписан на доске ранее. Можно ли выписать на доску многочлен $x^{2015}+1$?

Ответ: Можно.

Решение: Покажем по индукции, как получить любой многочлен вида x^n+1. База индукции: x^n+1 для $n=1$ и 2 выписаны. Пусть на доске есть многочлены $f_{n-2}=x^{n-2}+1$ и $f_{n-1}=x^{n-1}+1$. Тогда выпишем $g_n=f_{n-1}-f_{n-2}=x^{n-1}-x^{n-2}$, $h_n=(x+1)\cdot g_n=x^{n-2}(x-1)(x+1)=x^n-x^{n-2}$, $h_n+f_{n-2}=x^n-x^{n-2}+x^{n-2}+1=x^n+1$. Утверждение доказано.

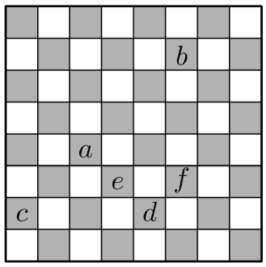
10 класс

1. (3 балла) Расставьте в кругах, расположенных в вершинах квадрата и в его центре, шесть натуральных чисел так, чтобы каждые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, больший 1, а любые два числа, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.



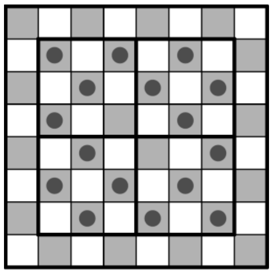
Решение: Для построения примера, используем произвольные 5 простых чисел. Например, 2,3,5,7,11. Тогда в вершинах пятиугольника будут расположены последовательно числа $6=2\cdot 3$, $15=3\cdot 5$, $35=5\cdot 7$, $77=7\cdot 11$, $22=11\cdot 2$, а в центре – $2310=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$.

2. (5 баллов) В игре шашки дамка (обозначим ее A) ест другую (обозначим ее B), если они стоят на одной диагонали, между ними нет фигур, и следующая по диагонали клетка за шашкой B свободна. Например, на рисунке дамка *a* бьет (может съесть) шашку *b*, но не бьет ни одну из шашек *c, d, e, f*. Какое наибольшее количество дамок можно поставить на доску так, чтобы каждая из них билась (находилась под угрозой быть съеденной) хотя бы одной другой? Напомним, что шашки могут стоять только на черных клетках.



Ответ: 16 дамок.

Решение: Пример приведен на рисунке.



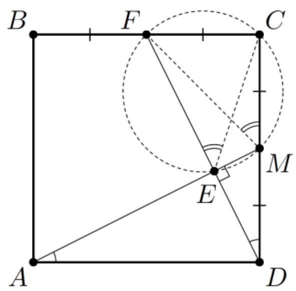
Докажем, что больше 16 дамок разместить не удастся. Заметим сначала, что на крайних клетках доски дамки стоять не могут (иначе их никто не бьет). Разобьем внутренний квадрат 6×6 на четыре квадранта 3×3 (смотри рисунок). В каждом из этих квадрантов не может находиться более 4 дамок. В противном случае в левом-верхнем и правом-нижнем квадрантах дамка, стоящая в центральной клетке, никем не бьется. Следовательно, можно поставить не более 4×4 = 16 дамок.

3. (7 баллов) Первый член последовательности равен 663. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 14. Найдите 2014-й член последовательности.

Ответ: 210.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности. Получим: $a_1 = 663$; $a_2 = 15 \times 14 = 210$; $a_3 = 3 \times 14 = 42$; $a_4 = 6 \times 14 = 84$; $a_5 = 12 \times 14 = 168$; $a_6 = 15 \times 14 = 210 = a_2$. Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее члены последовательности будут повторяться с периодом 4. Число 2014 дает остаток 2 при делении на 4, поэтому $a_{2014} = a_2 = 210$.

4. (10 баллов) На сторонах BC и CD квадрата ABCD отметили точки F и M, так что $S_{AMD} = S_{FCD} = \frac{1}{4}\cdot S_{ABCD}$. Найдите угол ∠CEF.



Ответ: 45°.

Решение: Из уравнения получим $FC=MD=\frac{1}{2}\cdot AB$. Следовательно, точки

M и F середины стороны CD и BC. Тогда треугольник ΔCFM прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle CMF = 45^{o}$. Треугольники ΔADM и ΔDCF равны по двум катетам. Следовательно, $\angle DAM=\angle CDF=\alpha$, $\angle ADE=90^{o} - \alpha$. Тогда $\angle AED=90^{o}$. Так как $\angle MEF = \angle MCF = 90^{o}$, то вокруг четырехугольника MCFE можно описать окружность. Вписанные углы $\angle CEF$ и $\angle CMF$ опираются на одну и ту же дугу этой окружности, значит, $\angle CEF = \angle CMF = 45^{o}$.

5. (10 баллов) Программист Петя составил программу, которая заполняет всеми возможными способами таблицу размером 9×9 числами от 1 до 81, используя каждое ровно один раз. Затем программа вычисляет девять произведений чисел в каждой строке таблицы и девять произведений чисел в каждом столбце в случае совпадения этих наборов, программа выводит таблицу на экран. Сколько различных таблиц получил Петя (таблицы полученные поворотом из друг из друга считаются разными).

Ответ: 0

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в девяти строках таблицы, представим в виде произведения простых множителей. Выпишем все простые числа, большие, чем 40, но меньшие, чем 81: 41, 43, 47, 53, 59,61, 67, 71, 73, 79. Заметим, что каждое из этих десяти чисел может встретиться только в одном из этих девяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, превышают 81. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

6. (10 баллов) Имеется куча из 2015 камней. Два игрока по очереди забирают из нее количество камней, равное положительному делителю числа камней в куче. Тот кто забирает последний камень проигрывает. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

Ответ: Второй.

Стратегия: Он всегда будет брать один камень, и оставлять первому кучу из нечетного числа камней.

7. (13 баллов) Натуральные числа от 1 до 1000 расставили в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 500, но меньше 1500.

Решение: Пусть нашлась такая перестановка $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ чисел 1, 2,..., 100, что каждая из сумм $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{999} + a_{1000}$ либо не больше 500 (в этом случае назовем сумму *маленькой*), либо не меньше 1500 (в этом случае назовем сумму *большой*). Тогда среди этих сумм найдется как маленькая (например, содержащая число 1), так и большая (например, содержащая число 1000). Значит, найдутся две соседние суммы $a_{i-1} + a_i$, $a_i + a_{i+1}$, одна из которых маленькая, а другая — большая. Модуль разности между этими суммами должен быть не меньше 1500 — 500 = 1000. С другой стороны, $|(a_{i-1} + a_i) - (a_i + a_{i+1})| = |a_{i-1} - a_{i+1}| \leq 1000 - 1 = 999$. Противоречие.

8. (13 баллов) На плоскости провели 10 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

Ответ: 40.

Решение: Выделим в каждом равнобедренном треугольнике прямую, на которой лежит его основание. Если он равносторонний, произвольным образом объявим его основанием одну из его сторон.

Пусть l и m — две из проведенных прямых. Тогда существует не более одного равнобедренного треугольника, у которого на l лежит основание, а на m — боковая сторона. Действительно, направление третьей стороны тогда находится однозначно, и существует не более одной проведенной прямой этого направления. Тогда прямая l является основанием не более, чем у четырех треугольников; иначе бы у треугольников с основаниями, лежащим на l, было бы 10 боковых сторон, и две лежали бы на одной прямой.

Итого, всего есть не более $4 \cdot 10 = 40$ оснований, то есть и треугольников не больше 40. Их может оказаться 40, если провести 10 прямых, параллельных десяти последовательным сторонам правильного 20-угольника, так, чтобы никакие три не пересеклись в одной точке. Легко видеть, что тогда на каждой прямой будет лежать ровно по три основания.

9. (15 баллов) В стране есть несколько городов, соединенных авиалиниями. На каждой авиалинии самолеты летают лишь в одну сторону; при этом между любыми двумя городами есть не более одной авиалинии. Известно, что, вылетев из любого города, нельзя в него вернуться. Также известно, что из города A в город B можно добраться ровно 2014 способами. Найдите минимальное возможное число городов в стране.

Ответ: 13.

Решение: Для каждого возможного способа добраться запишем множество городов (отличных от A и B), через которые маршрут проходит. Тогда для разных путей получаются разные множества.

Действительно, пусть для двух способов эти множества совпали. Поскольку каждые два города соединены не более, чем одной дорогой, то порядок, в котором эти города встречаются на пути, разный. Следовательно, есть такие два города X и Y, что при первом способе X встречается раньше, чем Y, а при втором способе наоборот. Но тогда из X можно добраться до Y и затем вернуться в X, что противоречит условию.

Пусть в стране n городов. Тогда способов не больше, чем подмножеств множества из $(n-2)$ городов, отличных от A и B, то есть $2014 \leq 2^{n-2}$, откуда $n \geq 13$.

Приведем пример страны с 13 городами, в которой условие выполнено. Перенумеруем города от 0 до 12 (A — нулевой, B — двенадцатый) и соединим пока любые два города в направлении от меньшего к большему. Тогда для каждого подмножества промежуточных городов существует путь по ним, то есть всего способов $2^{11} = 2048$. Теперь разрушим дороги, ведущие из второго и шестого городов в B. Тогда из общего количества способов вычлось количество способов добраться из A во второй и из A в шестой города, т. е. количество способов стало равно $2048 - 2^1 - 2^5 = 2014$, что и требовалось.

10. (15 баллов) Вася выбрал 360 последовательных натуральных чисел. Он хочет разбить их на 90 групп по 4 числа, в каждой группе посчитать произведение чисел, и у каждого из 90 полученных произведений посчитать сумму цифр. Дима утверждает, что может разбить их на 90 четверок так, что все полученные суммы цифр будут равными. Прав ли Петя?

    Ответ: Нет.

    Решение: Предположим, что это возможно, и числа указанным образом разбиты на 90 четверок. Хотя бы в одной из четверок присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит и всех произведений) делится на 9.

    Поэтому произведение чисел в любой четверке делится на 9. Тогда в каждой четверке либо найдется число, делящееся на 9 (четверки 1-го тина), либо найдутся два числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 9 (четверки 2-го типа). Среди 360 последовательных натуральных чисел ровно 40 делящихся на 9 чисел, и ровно 80 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, имеется не более 40 четверок 1-го типа и не более 40 четверок 2-го типа; однако, всего четверок 90 > 40 + 40. Противоречие.

11 класс

1. (4 балла) Какое наименьшее положительное число можно получить путем расстановки между числами 1,2,3,..., 2014,2015 знаков плюс и минус и выполнения этих операций ?

Ответ: 2.

Решение: В последовательности 1008 нечетных слагаемых, поэтому в результате всегда получается четное число. Наименьшее из положительных четных чисел равно 2. Покажем, что оно может быть получено. Для этого вначале расставить знаки так: 1 — 2 + 3 = 2. Остальные 2012 чисел нужно разбить на четверки последовательных натуральных чисел и в каждой из них расставить знаки так: $n-(n+1)-(n+2)+(n+3) = 0$.

2. (6 баллов) На горизонтальной плоскости лежат 3 шара радиуса R попарно касающиеся друг друга. Сверху в лунку, образованную этими шарами, положили четвертый шар такого же радиуса. Найти расстояние от его высшей точки до плоскости.

Решение: Центры шаров образуют правильный тетраэдр радиуса 2R. Его высота равна $\sqrt{\frac{8}{3}}$R,

а искомое расстояние $\sqrt{\frac{8}{3}}$R+2R.

3. (8 баллов) Задана функция $f(x)$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Известно, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются соотношения

a) $f(50+x) = f(50-x)$;

b) $f(100+x) = -f(100-x)$.

Докажите, что функция $f(x)$ – нечетная и периодическая.

*Решение***.** Подставим $x = n - 50$ в (*a*), тогда $f(n) = f(100 - n)$; подставим $x = n$ в (*b*), тогда $f(100 - n) = -f(n + 100)$. Поэтому $f(n) = -f(n + 100)$, и, аналогично, $f(n + 100) = -f(n + 200)$. Следовательно, $f(n + 200) = f(n)$, поэтому f периодична с периодом 200. Кроме того, $-f(n) = f(100 + n) = f(-n)$, так что f нечетна.

4. (10 баллов) Известно, что $tgA + tgB = 3$ и $ctgA + ctgB = 4$. Найдите $tg(A+B)$.

Ответ: 12.

Решение: $\frac{1}{tg\,A} + \frac{1}{tg\,B} = 4$; $\frac{tg\,A + tg\,B}{tg\,A \cdot tg\,B} = 4$; $\frac{3}{tg\,A \cdot tg\,B} = 4$; $tg\,A \cdot tg\,B = \frac{3}{4}$. Тогда $tg(A+B) = \frac{tg\,A + tg\,B}{1 - tg\,A \cdot tg\,B} = \frac{3}{1-\frac{3}{4}} = 12$.

5. (10 баллов) Саша и Маша, гуляя по парку, набрели на поляну, окруженную липами. Саша пошел вокруг поляны, считая деревья. Маша сделала то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошла в ту же сторону). Дерево, которое у Саши было 30-м, у Маши было 7-м, а дерево, которое у Саши было 7-м, у Маши было 104-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Ответ: 120.

Решение: Между первым и вторым упомянутыми деревьями Маша насчитала еще 104 –7 –1 = 96 деревьев. А Саша между вторым деревом и первым деревом насчитал 30 – 7 – 1 = 22 дерева. Значит, вокруг поляны растет 96 + 22 =118 и еще два упомянутых дерева, то есть ровно 120 деревьев.

6. (10 баллов) На доске написали число 18. Каждую минуту число на доске умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия пишут на доске вместо записанного числа. Ровно через час на экране написали число. Могло ли это быть число 24?

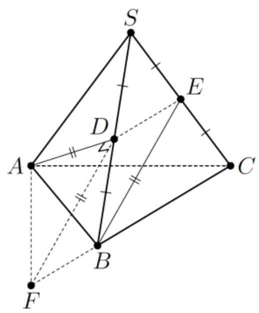
Ответ: нет, не могло.

Решение: Заметим, что $18 = 2^1 \cdot 3^2$, то есть суммарный показатель степени множителей (двоек и троек) равен 3. Независимо от произведенного действия, при каждой смене числа суммарный показатель степени множителей изменяется на 1. Всего должно произойти 60 таких изменений. Следовательно, через 60 минут суммарный показатель степени должен быть той же четности, что и в исходном числе 18.

Но $24 = 2^3 \cdot 3^1$, то есть этот показатель равен 4 – четному числу. Значит, получить число 24 ровно через час невозможно.

7. (10 баллов) Дана правильная треугольная пирамида SABC, ребро основания которой равно 2. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на эти медианы взаимно перпендикулярны. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Ответ: $\sqrt{6}$.



Решение: Пусть x – длина искомого бокового ребра. Тогда по формуле для вычисления медианы $AD = BE = \frac{\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2x^2 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2+8}}{2}$.

При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{ED}$ образом медианы BE является отрезок FD. Из треугольника ABF по теореме косинусов $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot cos120°} = \sqrt{7}$. Треугольник ADF – прямоугольный и равнобедренный, поэтому $AF = \sqrt{2}AD$. Тогда $\sqrt{7} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+8}}{2}$. Решением уравнения является $x = \sqrt{6}$.

8. (12 баллов) На плоскости даны 2015 векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно выбрать α и повернуть все векторы на угол α (некоторые по часовой стрелке, а некоторые против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1.

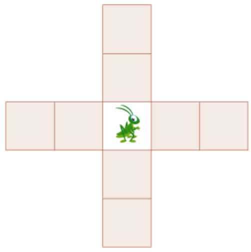
Решение; Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ данные векторы. Покажем, что их можно разбить на две группы так, что длины сумм векторов в группах будут различаться не более, чем на 1.

Пусть $\vec{S} = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{2015}$, $\vec{S}_k = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_k$, $\vec{T}_k = \vec{S} - \vec{S}_k = \vec{a}_{k+1} + \dots + \vec{a}_{2015}$. Обозначим $s_k = |\vec{S}_k|$, $t_k = |\vec{T}_k|$. Ясно, что $s_0 = 0 \le |\vec{S}| = t_0$, но $s_{2015} = |\vec{S}| \ge 0 = t_{2015}$. Значит, найдется такое k, что $s_k \le t_k$, но $s_{k+1} \ge t_{k+1}$.

Заметим, что $|s_{k+1} - s_k|$ и $|t_k - t_{k+1}|$ не превосходят $|\vec{a}_{k+1}| \le 1$. Значит, $(t_k - s_k) + (s_{k+1} - t_{k+1}) \le 2$, то есть либо $0 \le t_k - s_k \le 1$, либо $0 \le s_{k+1} - t_{k+1} \le 1$. В любом случае требуемое разбиение найдено.

Пусть $\vec{S}'$ и $\vec{T}'$ суммы векторов в полученных группах, и пусть угол между этими суммами равен 180°– 2α. Тогда, повернув векторы одной из групп по часовой стрелке, а векторы другой — против часовой стрелки на угол α можно добиться того, что угол между суммами новых векторов будет равен 180°. Тогда сумма полученных векторов будет иметь длину $\left||\vec{S}'| - |\vec{T}'|\right| \le 1$, что и требовалось.

9. (15 баллов) Кузнечика поставили на клетку доски 10×10. Он умеет прыгать на соседнюю клетку или через одну в любом из четырех направлений. Сможет ли он обойти все клетки доски, побывав на каждой по одному разу, чередуя прыжки длиной в одну и две клетки.



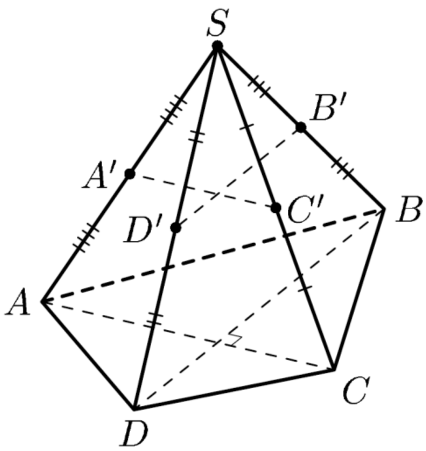
Ответ: Не сможет.

Решение: Раскрасим клетки доски в 4 цвета. Тогда кузнечик, делая ход длиной в одну клетку, меняет цвет клетки, а если она делает ход длиной в две клетки, то переходит на клетку того же цвета. Поэтому, если первый прыжок кузнечика был длиной в одну клетку, то все клетки доски, по которым проходил кузнечик, кроме первой и последней, разбиваются на пары одноцветных. Если же первый прыжок кузнечика был длиной в две клетки, то все клетки можно разбить на одноцветные пары. Следовательно, если требуемый в условии обход возможен, то количество групп одноцветных клеток, содержащих нечетное число клеток, не может быть больше двух. Однако доска содержит 4 группы по 25 клеток одного цвета. Таким образом, кузнечик не сможет обойти нужным образом все клетки.

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

10. (15 баллов) A', B', C', D' середины боковых ребер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$. Докажите, что если $AB' = CB', BC' = DC', CD' = AD'$, то $BA' = DA'$.

Решение: Геометрическое место точек, равноудаленных от A и C – плоскость, перпендикулярная отрезку AC (и проходящая через его середину). Точки B' и D' лежат в этой плоскости, поэтому $B'D' \perp AC$. Так как $B'D'$ средняя линия треугольника SBD, то $BD \parallel B'D'$, откуда $BD \perp AC$.



Так как $A'C'$ средняя линия треугольника SAC, то $AC \parallel A'C'$, откуда $BD \perp A'C'$, значит A' лежит в плоскости, перпендикулярной BD и проходящей через C'. Так как $BC' = DC'$, то эта плоскость является геометрическим местом точек, равноудаленных от B и D. Следовательно, $BA' = DA'$.