2 тур

9 класс

1. Некоторые из 20 больших коробок содержат по 8 средних, а некоторые из средних коробок содержат по 8 маленьких. Сколько всего коробок, если пустых 97 штук?

Ответ: Общее число коробок равно101.

*Решение:*Пусть из 20 больших коробок x содержали по 8 средних, тогда средних коробок было $8x$. Пусть из них y содержали по 8 маленьких коробок, тогда маленьких коробок было $8y$. Число пустых коробок при этом равно $13 - x+8x - y +8y= 7x+7y +20= 97$, откуда $x+ y=11$. С другой стороны, общее число коробок равно $13+8x+8y =101$.

2. На доске нарисован выпуклый 2015-угольник. Внутри него отметили еще 2000 точек. Робот Тапи последовательно соединил их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами 2015-угольника так, что он разбился на треугольники. Сколько треугольников могло получиться у Тапи?

Ответ: 6013.

*Решение***:** Пусть многоугольник разбился на n треугольников. Подсчитаем двумя способами сумму углов этих треугольников. С одной стороны, она равна $180°n$. С другой стороны, эти углы составляют 2000 полных углов и 2015 углов многоугольника, то есть сумма их равна $2000\cdot 360° + (2015-2)\cdot 180° = 6013\cdot 180°$.

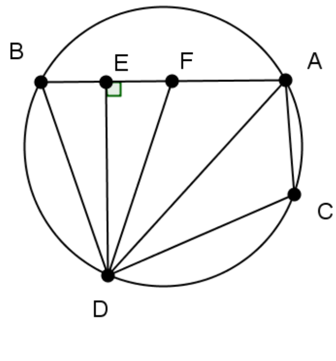
3. В ребусе на сложение трёхзначных чисел

ДОМ + ДОМ +...+ ДОМ =СЕЛО буквами зашифрованы цифры, при этом разные буквы, как обычно, соответствуют разным цифрам. Какое наибольшее количество «домов» может быть в левой части?

Ответ: 95.

*Решение:*Наибольшее значение числа СЕЛО равно 9876, наименьшее значение числа ДОМ равно 102, поэтому число ДОМов не больше целой части $\frac{9876}{102}$, то – есть 96. При этом $\frac{9876}{102} < 96$, поэтому значение 96 достигается только, когда ДУБ равен 102, однако 96 ×102 = 9792 - содержит одинаковые цифры. А вот 95 получить можно: 95×103 = 9785 , удовлетворяет условию ребуса.

4. В четырехугольнике ABCD BD = CD и ∠CBD = ∠CAD, точка E - основание перпендикуляра из D на прямую AB. Доказать, что длина AE равна полусумме длин AB и AC.



Решение: ∠CBD=∠CAD, следовательно, данный четырехугольник вписанный. Из равнобедренности треугольника BDC следует равенство ∠CAD = ∠CBD = ∠BCD = ∠BAD и AD – биссектриса угла $\angle BAC$. Отметим на луче AB точку F так, что $AF = AC$, тогда треугольники ADC и ADF равны по двум сторонам и углу, следовательно, $DF = DC$. Значит, треугольник BDF равнобедренный, и его высота DE делит основание BF пополам. Отсюда

$$AE = \frac{1}{2}(AF + AB) = \frac{1}{2}(AC + AB),$$

что и требовалось доказать.

5. Марат раскрашивает 2015 точек, расположенных на окружности, в 13 цветов. Затем Дима проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом

Дима хочет провести как можно больше хорд, а Марат старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Дима?

Ответ:154.

Решение: Заметим, что 2015 = 13·155; поэтому найдутся 2 цвета, в которые покрашены в сумме не менее 2·155 = 310 точек.

Докажем индукцией по k, что через 2k — 1 точку двух цветов всегда можно провести k – 1 непересекаюшуюся хорду с одноцветными концами. База очевидна. Пусть k > 2. Тогда среди точек возьмем две одноцветных, стоящих подряд. Соединим их хордой, выбросим и применим предположение индукции к оставшимся точкам.

Выбрав 309 точек двух цветов и применив данное утверждение, получаем, что 154 хорды Дима сможет провести всегда. Осталось привести пример, когда больше хорд провести нельзя.

Пусть на окружности стоит $13k$ точек. Пусть Марат покрасит каждую точку в цвет, соответствующий остатку от деления на 13 ее номера. Докажем индукцией по k, что через эти точки можно провести не более k – 1 хорды с выполнением условия. База очевидна, докажем переход. Пусть проведено некоторое количество хорд. Рассмотрев две соединенные точки A и B на минимальном расстоянии друг от друга, получим такую хорду AB, что на одной из дуг, на которые она делит окружность, нет концов других проведенных хорд. Теперь сотрем хорду AB и уберем с окружности все точки этой дуги, включая один из концов хорды. Мы получили исходную раскраску $17n$ точек при $n < k$. Они соединены не более, чем n – *1* хордой, поэтому изначально хорд было не больше $n - 1 + 1 \leq k - 1$, что и требовалось.

10 класс

1. Доказать, что среди произвольных тринадцати человек либо найдутся пятеро попарно незнакомых, либо найдётся человек, знакомый не менее, чем с пятью другими.

Решение: Предположим, что в некоторой компании из 21 человек у каждого не более четырех знакомых. Рассмотрим любых двух незнакомых членов этой компании, назовём их А и Б. Каждый из них не знает не менее 15 человек, отличных от А и Б, всего таких в компании 19. Поэтому А и Б имеют подгруппу из не менее 15+15-19=11 общих незнакомых. Любые двое из этих 11, скажем, В и Г, внутри своей подгруппы не знает не менее 5 человек, отличных от А, Б, В, Г, всего таких в подгруппе 9, поэтому у В и Г не менее 5+5-9=1 общего незнакомого, назовем его Д, знает не более четырех других, следовательно, не знает хотя бы одного, назовём его Г. По выбору А, Б, В, Г и Д являются пятеркой попарно незнакомых членов этой компании.

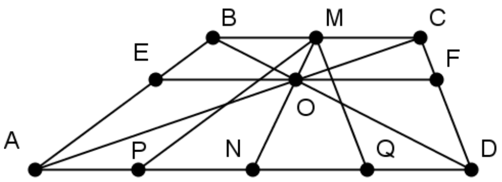
2. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению $x^2 - y^2 + 8x + 14y - 33 = 0$. Найти минимум значения выражения $x^2 + y^2$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду:$(4 + x)^2 - (y - 7)^2 = (x - y + 11)(x + y - 3) = 0$. Следовательно, множеством точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, является объединение прямых $y = x + 11$ и $y = -x + 3$. Выражение $x^2 + y^2$ является квадратом расстояния от начала координат до точки (x, y) , поэтому от нас требуется найти минимум квадрата расстояния от начала координат до точек этих прямых. Легко убедиться, что это квадрат длины перпендикуляра ко второй прямой, равный $\frac{3}{2}$.

3. В трапеции углы при большем основании равны 25° и 75° градусов, длина средней линии равна 27 см, а отрезка, соединяющего середины оснований - 9 см. Найти длину отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах.

Ответ: 24 см.



Решение: Обозначим вершины трапеции за *ABCD*, середины оснований за *M* и *N*, отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям с концами на боковых сторонах за *EF*. Проведём через *M* отрезки *MP* и *MQ* параллельно боковым сторонам трапеции, из условия получим, что треугольник *PMQ* – прямоугольный с медианой *MN* и гипотенузой *PQ*, равной разности *AD* и *BC*. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, длина *MN* равна половине *PQ*, следовательно, полуразность оснований трапеции равна 9 см. Учитывая, что полусумма оснований равна средней линии, то – есть 27 см, находим длины оснований: *AD=36, BC=18.* Из подобия треугольников *AOD* и *BOC* получаем *AO:OC=2:1*, поэтому длины отрезков *EO* и *OF* равны $\frac{2}{3}BC =$ 12 см, следовательно, длина *EF* равна 24 см.

4. Функция f (x) определена для всех действительных чисел x, принимает действительные значения и удовлетворяет тождеству

$$f\big(x + 4f(y)\big) = x + 4y + 5$$

для всех x и y . Найти все такие функции $f(x)$.

Ответ: $f(x) = \mathrm{x} + 1$.

Решение: Подставим в тождество вместо x число $x - 4f(0)$, а вместо y число 0, получим $f(x) = x - 4f(0) + 5$ – линейная функция. Подставим в последнее выражение вместо x число 0 , получим $f(0) = 1$. Следовательно, $f(x) = \mathrm{x} + 1$.

Проверим верность ответа: $f\big(x + 4f(y)\big) = \mathrm{f(x + 4y + 4)} = x + 4y + 5$.

5. Василий в комнате 9м×9м произвольным образом выложил паркет используя плашки 10см×20см (стороны плашек параллельны сторонам комнаты, плашки не резутся и не перекрываются). Мария хочет раскрасить плашки в три цвета так, чтобы плашек каждого цвета было поровну и у каждой плашки было не более двух соседей ее цвета (плашки считаются соседними, если их границы имеют более одной общей точки). Сумеет ли Мрия осуществить задуманное?

Ответ: Да,сумеет.

Решение: Разобьем комнату на квадраты 10см×10см. Тогда каждая плашка составляет доминошку 1×2. Рассмотрим «диагональную» раскраску клеток в три цвета. Далее, покрасим каждую доминошку в тот цвет, которого нет среди цветов ее клеток (т. е. доминошку, содержащую клетки 1-го и 2-го цвета, красим в 3-й цвет, доминошку, содержащую клетки 2-го и 3-го цвета — в 1-й цвет, а доминошку, содержащую клетки 1-го и 3-го цвета — во 2-й цвет). Докажем, что эта раскраска подходит. Рассмотрим произвольную доминошку. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что она горизонтальна и окрашена в 3-й цвет (т. е. содержит клетки 1-го и 2-го цвета). Тогда четыре из шести клеток, соседних с этой доминошкой, имеют цвет 3 и, следовательно, содержащие их доминошки не могут быть 3-го цвета. Таким образом, не может быть более двух доминошек, соседних с данной и имеющих одинаковый с ней цвет.

1	2	3	1	2	⋯
2	3	1	2	3	⋯
3	1	2	3	1	⋯
1	2	3	1	2	⋯
2	3	1	2	3	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

	3	1	
3	**1**	**2**	3
	2	3	

Осталось проверить, что доминошек каждого цвета поровну. Для этого рассмотрим доминошки 2-го и 3-го цветов. Заметим, что это в точности те доминошки, которые содержат клетки 1-го цвета. То есть, их количество равно количеству клеток 1-го цвета, а именно, 2700. Аналогично, суммарное количество доминошек любых двух цветов также равно 2700. Таким образом, количество доминошек каждого цвета равно 1350.

11 класс

1. Найти все решения уравнения $x^2 = 3^y + 9^z$ в натуральных числах.

Ответ: $x = 2\times3^{2t}$, $y = 2t+1$, $z=t$ для произвольного натурального t.

Решение: $x^2 = 3^y + 3^{2z}$.Если $y \geq 2z$, то $x^2 = 3^y + 3^{2z}=3^{2z}(3^{y-2z}+1)$. Числа 3^{2z} и $3^{y-2z}+1$ взаимно просты, поэтому каждое из них тоже является квадратом натурального числа. Следовательно, $3^{y-2z} = (k-1)(k+1)$ для некоторого натурального k. Значит, $k-1$ и $k+1$одновременно являются степенями тройки, что возможно только при $k = 2$, $y - 2z = 1$. Тогда $x^2 = 3^{2z}\times4$, поэтому $z=t$, $y= 2t+1$ и $x= 2\times3^{2t}$ для произвольного натурального t.

В случае $y < 2z$, получим $x^2 = 3^y + 3^{2z}=3^y(3^{2z-y}+1)$. Аналогично рассуждая, получим $2z - y = 1$ и $x^2 = 3^y\times4$. Тогда $y=2z-1$ должен быть четным. Следовательно, в этом случае решений нет.

2. Найти все решения системы уравнений: $\begin{cases} x + y = xy \\ x + z = 2xz \\ y + z = 9yz \end{cases}$.

*Ответ***:** $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{5}$, либо $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

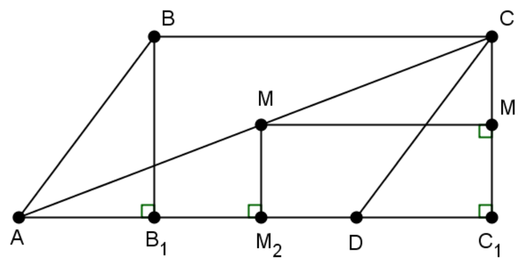
*Решение:*Если хотя бы одна переменная равна нулю, то $x = y = z = 0$. Иначе делим каждое уравнение системы на его правую часть, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 9 \end{cases}.$$

Решая систему, получим $\frac{1}{x} = -3, \frac{1}{y} = 4, \frac{1}{z} = 5$, откуда $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{5}$.

3. В параллелограмме *ABCD* длины сторон *AB* и *BC* равны соответственно 20 см и 30 см, $\cos\angle DAB = \frac{3}{5}$. Внутри *ABCD* выбрана точка *M* такая, что $MC = 6\sqrt{10}$ см, а расстояние от *M* до прямой *AD* равно 10 см. Найти длину *AM* .

Ответ: AM = 26 см.



Решение: Опустим из вершины B высоту BB_1 на сторону *AD* , тогда $AB_1 = 12$, $BB_1 = 16$. Опустим из вершины *C* высоту CC_1 на сторону *AD* , тогда $DC_1 = AB_1 = 12$, $CC_1 = BB_1 =16$. Опустим из точки *M* перпендикуляры MM_1 на CC_1, и MM_2 на *AD* , тогда $CM_1 = CC_1 - M_1C_1 = CC_1 - MM_2 = 6$. Следовательно, $MM_1 = \sqrt{\left(6\sqrt{10}\right)^2 - 6^2} = 18$, поэтому $DM_2 = C_1M_2 - C_1D = MM_1 - C_1D = 6$, значит $AM_2 = AD - DM_2 = 24$ и $AM = \sqrt{AM_2^2 + MM_2^2} = 26$.

4. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и для всех действительных чисел x выполнено равенство $f(f(x)) = 7x + 12$. Найти $f(-2)$.

*Ответ***:** *f(-2)=-2.*

*Решение:*Рассмотрим выражение *f(f(f(x)))*. С одной стороны, оно равно $f(7x+12)$, с другой - равно $7f(x)+12$. Заметим, что при $x=-2$ имеем $7x+12=x$, следовательно $7f(-2)+12=f(-2)$, откуда $f(-2)=-2$.

5. В некоторой стране 30 городов, некоторые из которых напрямую связаны дорогами. Кроме того, если выбрать любые 16 городов этой страны, то для любой пары

выбранных городов из одного из них можно проехать в другой, используя только дороги между выбранными городами. Найти минимально возможное число дорог в этой стране.

Ответ: 100.

Решение: Заметим, что каждый город не связан напрямую дорогами не более, чем с 14 городами. В противном случае, взяв город и 15 городов, не соединённых с ним, получим 16 городов, нарушающих условие задачи. Значит, из каждого города выходят не менее 15 авиалиний, а общее число авиалиний будет не меньше $\frac{30 \cdot 15}{2} = 225$. С другой стороны, разбив города на две группы по 15 в каждой и напрямую связав города одной группы в точности со всеми городами другой группы, получим пример, когда дорог ровно 225. Любые 16 выбранных городов в этом случае содержат два города разных групп, допустим, А и Б соответственно. Все города первой группы напрямую связаны с Б, все города второй группы напрямую связаны с А, и А и Б связаны напрямую. Пусть В и Г два произвольных выбранных города. Для проезда из В в Г нужно выбрать, соответственно, маршрут:

а) Если В и Г в первой группе, то В-Б-Г,

б) Если В и Г во второй группе, то В-А-Г,

в) Если В и Г в разных группах, то они напрямую соединены дорогой по построению.