9 класс.

1. Найдите все решения уравнения

$$\frac{x-2}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{4-y}{x}-\frac{|y-2x|}{xy}.$$

Ответ: $x=1$, $y=2$.
Решение. Это уравнение приводится к виду

$$x^2-2x+5=4y-y^2-|y-2x|, \quad xy\neq 0;$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+|y-2x|=0.$$

Каждое слагаемое слева неотрицательно, поэтому сумма будет нулем только для нулевых слагаемых: $x-1=0$, $y-2=0$, $y-2x=0$, $xy\neq 0$. Откуда получаем ответ.

2. Хорда CD окружности с центром в точке O перпендикулярна ее диаметру AB, хорда AE пересекает радиус OC в точке M, а хорда DE — хорду BC в точке N. Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.
Решение. $\angle CAB=\angle CDB \Longrightarrow \triangle AOC\sim\triangle DBC$ (т.к. равнобедренные). $\angle CAE=\angle CDE$ и $\angle ACM=\angle DCN \Longrightarrow \triangle ACM\sim\triangle DCN$. Из подобий следует, что $\dfrac{CM}{CN}=\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CO}{CB} \Longrightarrow$ отрезок MN делит стороны треугольника OCB на пропорциональные отрезки $\Longrightarrow MN\|OB$.

3. Для натуральных чисел a, b, c и x, y, z выполняются равенства $a^2+b^2=c^2$ и $x^2+y^2=z^2$. Докажите неравенство

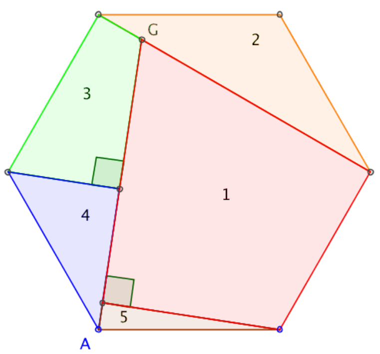
$$(a+x)^2+(b+y)^2\leqslant(c+z)^2.$$

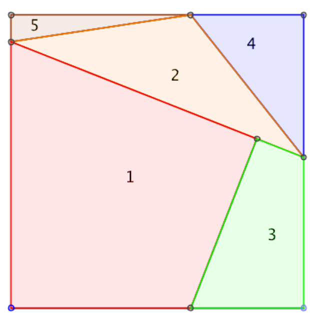
Когда достигается равенство?
Решение. Определим вектора $\vec{c}\{a;b\}$ и $\vec{z}\{x;y\}$. Тогда $|\vec{c}+\vec{z}|\leqslant|\vec{c}|+|\vec{z}|=c+z$ неравенство треугольника. В координатах это неравенство приобретает вид:

$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}\leqslant c+z.$$

Равенство достигается, когда вектора $\vec{c}\{a;b\}$ и $\vec{z}\{x;y\}$ одинаково направлены, т.е. $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

4. Разрежьте правильный шестиугольник на 5 частей и сложите из них квадрат.
Решение. Отрезок AG равен стороне квадрата.

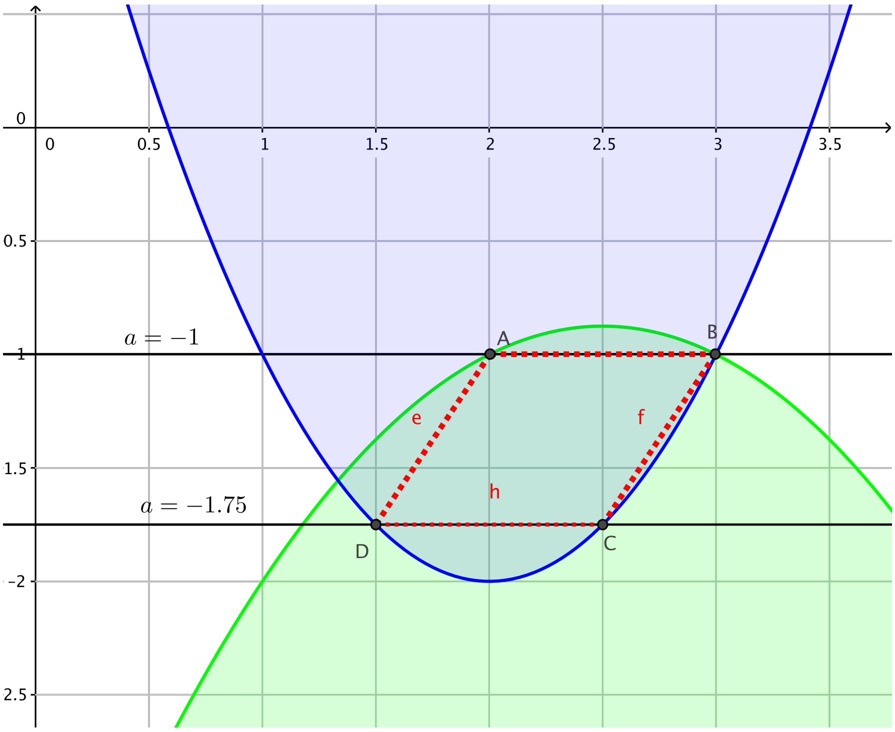




5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2 - 4x + 2 - a \leqslant 0$ и $x^2 - 5x + 2a + 8 \leqslant 0$ образуют на числовой оси отрезок, длина которого равна единице.

Ответ: $a = -1; a = -1,75$

Решение. В плоскости Oxa строим множества решений неравенств (часть плоскости, ограниченной параболами) $a \geqslant x^2 - 4x + 2$ и $a \leqslant -0,5x^2 + 2,5x - 4$. В общей части решения находим отрезки AB и CD длины один, соответствующие значениям $a = -1$ и $a = -1,75$ соответсвенно. Других значений нет, так как внутри полосы между прямыми AD и BC все отрезки длины 1, при $a \in (-1,75; -1)$ решение образует отрезок больше одного, вне указанного промежутка — меньше одного.



10 класс.

1. Существует ли такое число x, что все три числа $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}$ и $\frac{1}{x^2+1} - 2x$ являются целыми?

Решение. Допустим, что все числа целые. Тогда их сумма $-x$ — тоже целое. Но дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2+1}$ при целых x обе целыми быть не могут.

2. Стороны выпуклого четырехугольника в каком-то порядке равны 6, 7, 8, 9. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 9$, $AD = 7$. По теореме косинусов

$$BD^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos A, \quad BD^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos C.$$

$\cos C = -\cos A$, так как $\angle A + \angle C = 180°$. Откуда

$$85 - 84 \cos A = 145 + 144 \cos A, \quad \cos A = -\frac{5}{19}.$$

Тогда $\sin A = \sin C = \sqrt{1 - \frac{25}{361}} = \frac{4\sqrt{21}}{19}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD) \sin A = 12\sqrt{21}.$$

3. Решите уравнение $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 + t^2 + \frac{1}{3} = xy + yz + zt + t$.

Решение. Умножим все на 2 и перепишем равенство в виде

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (t^2 - 2zt + z^2) + (t^2 - 2t + 1) + z^2 = \frac{1}{3}$$

или

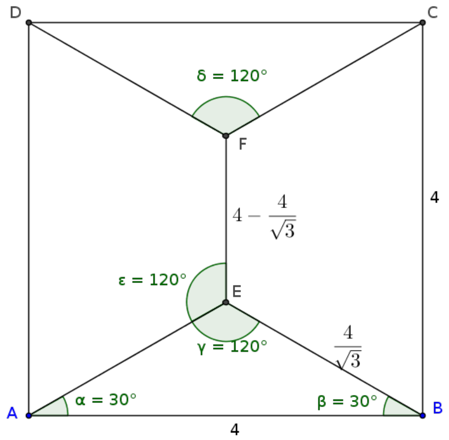
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (t - z)^2 + (1 - t)^2 + z^2 = \frac{1}{3}.$$

Докажем вспомогательное неравенство: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, причем равенство имеет место только при $a = b = c$. Действительно, оно равносильно неравенству $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, или $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ca$. Последнее неравенство в свою очередь есть сумма трех неравенств Коши: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + a^2 \geqslant 2ca$. Причем для выполнения равенства необходимо, чтобы $a = b$, $b = c$, $c = a$.

Заметим, что по доказанному неравенству $(t - z)^2 + (1 - t)^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$, так как $(t - z) + (1 - t) + z = 1$. Кроме того, ясно, что $(x - y)^2 + (y - z)^2 \geqslant 0$. Следовательно, исходное равенство может иметь место только при $x - y = y - z = 0$ и $t - z = z = 1 - t$ (именно в таком порядке, чтоб сумма равнялась 1). Решая эту систему, находим $x = y = z = 1/3$, $t = 2/3$.

4. Необходимо соединить в одну электрическую сеть четыре светильника, находящихся в вершинах квадрата со стороной 4 метра. Хватит ли на это 11 метров провода? (Другими словами, существует ли связный граф, содержащий вершины квадрата со стороной 4, сумма длин ребер которого не превосходит 11?)

Решение. Да, хватит. Если соединить как показано на рисунке, $AE + BE + CF + DF + EF = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{3}} = 4 + 4\sqrt{3} < 11$.



5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2} \geqslant 0, \\ ax+a > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

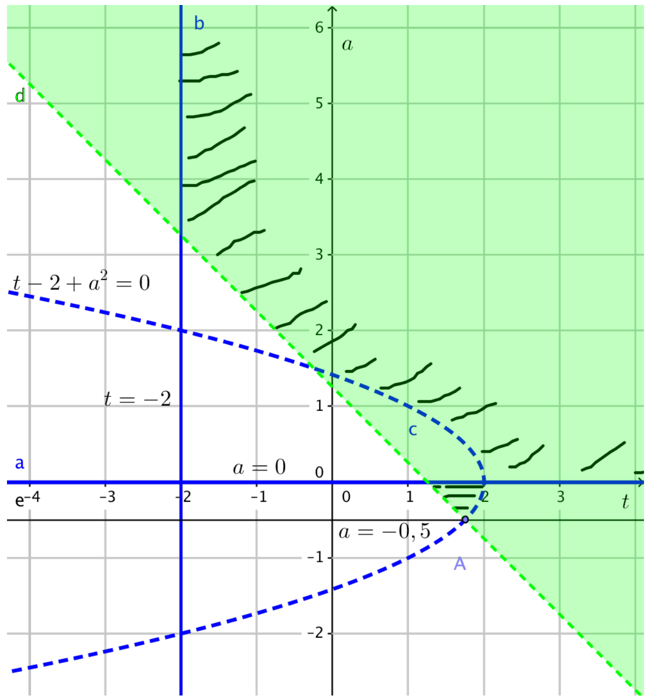
не имеет решений.

Ответ: $a \in (-\infty; -0,5] \cup \{0\}$

Решение. Значение $a = 0$ удовлетворяет условию задачи. При $a \neq 0$ делаем замену переменной $t = ax$. Для каждого t существует единственный $x = \dfrac{t}{a}$.

$$\begin{cases} \dfrac{at+2a}{t-2+a^2} \geqslant 0, \\ t+a > \dfrac{5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a(t+2)}{t-2+a^2} \geqslant 0, \\ t+a > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Решаем графически на плоскости Ota. Заштрихованная область на рисунке — решение системы. Координаты точки A находим решая уравнение $a^2 - a - \dfrac{3}{4} = 0$.



11 класс.

1. Непостоянная функция $f(x)$ для всех действительных значений x удовлетворяет равенству

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{3}f(x).$$

Докажите, что $f(x)$ периодична и приведите пример такой функции.
Решение. $3f(x)=\sqrt{3}f(x+1)+\sqrt{3}f(x-1)=f(x+2)+f(x)+f(x)+f(x-2)$. Откуда $f(x)=f(x+2)+f(x-2)=f(x+4)+f(x)+f(x-2)$, т. е. $f(x+4)=-f(x-2)$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Тогда $f(x)=-f(x+6)=f(x+12)$. Функция $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{6}+\sin\dfrac{\pi x}{6}$ удовлетворяет условию задачи.

2. Две стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны. Пусть M и N — середины сторон BC и CD соответственно, а P — точка пересечения AN и DM. Докажите, что если $AP=4PN$, то $ABCD$ — параллелограмм.
Решение. 1) Пусть $AB\|CD$. Проведем среднюю линию MK, пусть L — точка пересечения MK и AN. Пусть $PN=x$, тогда по условию $AN=5\cdot PN=5x$. Поскольку KL — средняя линия в $\triangle ADN$, то $LN=2{,}5x$. Следовательно, $LP=1{,}5x$. Треугольники DPN и LPM очевидно подобны с коэффициентом подобия 1,5. Обозначим $CN=DN=a$, тогда $LM=1{,}5a$. Кроме того, $KL=0{,}5a$, потому что это средняя линия. Тогда $KM=KL+LM=2a=CD$. Но если средняя линия трапеции равна одному из оснований, то это параллелограмм (удвоенная средняя линия равна сумме оснований).
2) Пусть $BC\|AD$. Проведем среднюю линию NK, пусть L — точка пересечения NK и DM. Треугольники APD и LPN очевидно подобны с коэффициентом подобия 4. Тогда если $AD=4a$, то $LN=a$. Отсюда следует, что $CM=2a$ (LN — средняя линия в $\triangle CDM$). Кроме того, $BM=CM$. Тогда $BC=2a+2a=4a=AD$ и $ABCD$ — параллелограмм.

3. Известно, что многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx-1$ имеет три различных положительных корня. Докажите, что $P(-1)<-8$.
Решение. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b$ и $x_1x_2x_3=1$. $P(-1)=-1+a-b-1=-2-(x_1+x_2+x_3)-(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=-2-(x_1+x_2+x_3+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})=-2-(x_1+\dfrac{1}{x_1})-(x_2+\dfrac{1}{x_2})-(x_3+\dfrac{1}{x_3})<-2-2-2-2=-8.$

4. На сфере радиуса 1 расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.
Решение. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ данные точки, O — центр сферы. Обозначим $\vec{x_i}=\overrightarrow{OA_i}$. Тогда сумма квадратов расстояний между точками

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{x_i}-\vec{x_j})^2=\frac{1}{2}\left(n\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}^{\,2}+n\sum_{j=1}^{n}\vec{x_j}^{\,2}-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{x_i}\vec{x_j}\right)=$$

$$=n^2-\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{x_j}=n^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{x_i}\right)^2\leqslant n^2.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3|x+3a|+|x+a^2|+2x=a$$

не имеет решения.
Ответ: $(-\infty;0)\cup(10;+\infty)$

Решение. Способ I. Рассмотрим функцию $f(x) = 3|x+3a| + |x+a^2| + 2x - a$. $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{x+3a}{|x+3a|} + \dfrac{x+a^2}{|x+a^2|} + 2$, $x_1 = -3a$ и $x_2 = -a^2$ критические. При $x < x_1$ и $x < x_2$ $f'(x) = -2 \Longrightarrow f \searrow$; при $x > x_1$ $x > x_2$ $f'(x) = 6 \Longrightarrow f \nearrow$. Сверху функция f не ограничена, она непрерывна, а наименьшее значение достигается в точке $-3a$: если $-3a < x < -a^2$, то $f'(x) = 4 > 0$; если же $-a^2 < x < -3a$, то $f'(x) = 0$. Все значения функции должны быть положительны. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(-3a) > 0$. Получаем следующее неравенство

$$|a^2 - 3a| > 7a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a > 7a, \\ a^2 - 3a < -7a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 10, \\ a < 0. \end{array}\right.$$

Способ II. Рассмотрим функцию $f(x) = 3|x+3a|+|x+a^2|+2x-a$. Нам требуется найти все такие значения параметра a, что $f(x)$ не обращается в нуль нигде на числовой оси. Сразу заметим, что $f(x)$ непрерывна на всей оси.

Обозначим $x_1 = -3a$, $x_2 = -a^2$. Сравним эти числа: $x_1 > x_2$ тогда и только тогда, когда $a^2 - 3a > 0$, т.е., $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

1) Пусть $x_1 > x_2$, т.е., $a \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. На интервале $(-\infty, x_1]$ оба модуля раскрываются с минусом и $f(x)$ — линейная функция с угловым коэффициентом -4, следовательно, убывает. На отрезке $[x_2, x_1]$ первый модуль раскрывается с минусом, второй — с плюсом, следовательно, $f(x)$ — постоянная функция. На интервале $[x_1, +\infty)$ функция $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 6, следовательно, возрастает. Из вышеуказанного следует, что для всех x функция $f(x) \geqslant f(x_1)$. Следовательно, для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ не имело решения, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_1) > 0$.

Имеем $f(x_1) = |-3a + a^2| - 6a - a = a^2 - 10a$. Решением неравенства $a^2 - 10a > 0$ является множество $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$. Все оно содержится во множестве $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

2) Пусть $x_1 < x_2$, т.е., $a \in (0, 3)$. Тогда на интервале $(-\infty, x_2]$ оба модуля раскрываются с минусом и $f(x)$ — линейная функция с угловым коэффициентом -4, следовательно, убывает. На отрезке $[x_1, x_2]$ первый модуль раскрывается с плюсом, второй — с минусом, следовательно, $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 4. На интервале $[x_2, +\infty)$ функция $f(x)$ — линейная с угловым коэффициентом 6, следовательно, возрастает на обоих этих промежутках. Тогда $x = x_1$ — точка минимума функции и для того, чтобы уравнение $f(x) = 0$ не имело решения, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_1) > 0$. В этом случае $f(x_1) = |-3a + a^2| - 6a - a = 3a - a^2 - 7a = -(a^2 + 4a)$. Решением неравенства $-a(a+4) > 0$ служит интервал $(-4, 0)$. Он имеет пустое пересечение с множеством $(0, 3)$, следовательно в этом случае ни одно значение a не является решением задачи.

3) Пусть $x_1 = x_2$, т.е., $a \in \{0, 3\}$. Заметим, что в этом случае, аналогично случаю 2) точка $x = x_1$ есть точка минимума функции, и, опять же, $f(x_1) = 0 + 0 - 7a$ должно быть положительно, что не выполняется при $a = 0$ и $a = 3$.