

**ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

9 КЛАСС.

1. Найдите все решения уравнения

$$\frac{x-2}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{4-y}{x} - \frac{|y-2x|}{xy}.$$

2. Хорда  $CD$  окружности с центром в точке  $O$  перпендикулярна ее диаметру  $AB$ , хорда  $AE$  пересекает радиус  $OC$  в точке  $M$ , а хорда  $DE$  — хорду  $BC$  в точке  $N$ . Докажите, что прямая  $MN$  параллельна прямой  $AB$ .

3. Для натуральных чисел  $a, b, c$  и  $x, y, z$  выполняются равенства  $a^2 + b^2 = c^2$  и  $x^2 + y^2 = z^2$ . Докажите неравенство

$$(a+x)^2 + (b+y)^2 \leq (c+z)^2.$$

Когда достигается равенство?

4. Разрежьте правильный шестиугольник на 5 частей и сложите из них квадрат.

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых общие решения неравенств  $x^2 - 4x + 2 - a \leq 0$  и  $x^2 - 5x + 2a + 8 \leq 0$  образуют на числовой оси отрезок, длина которого равна единице.

10 КЛАСС.

1. Существует ли такое число  $x$ , что все три числа

$$x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^2 + 1} - 2x$$

являются целыми?

2. Стороны выпуклого четырехугольника в каком-то порядке равны 6, 7, 8, 9. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Найдите площадь четырехугольника.

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 + t^2 + \frac{1}{3} = xy + yz + zt + t.$$

4. Необходимо соединить в одну электрическую сеть четыре светильника, находящихся в вершинах квадрата со стороной 4 метра. Хватит ли на это 11 метров провода? (Другими словами, существует ли связный граф, содержащий вершины квадрата со стороной 4, сумма длин ребер которого не превосходит 11?)

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} \frac{a^2x + 2a}{ax - 2 + a^2} \geq 0, \\ ax + a > \frac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений.

11 КЛАСС.

1. Непостоянная функция  $f(x)$  для всех действительных значений  $x$  удовлетворяет равенству

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3}f(x).$$

Докажите, что  $f(x)$  периодична и приведите пример такой функции.

2. Две стороны четырехугольника  $ABCD$  параллельны. Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно, а  $P$  — точка пересечения  $AN$  и  $DM$ . Докажите, что если  $AP = 4PN$ , то  $ABCD$  — параллелограмм.

3. Известно, что многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$  имеет три различных положительных корня. Докажите, что  $P(-1) < -8$ .

4. На сфере радиуса 1 расположено  $n$  точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше  $n^2$ .

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$3|x + 3a| + |x + a^2| + 2x = a$$

не имеет решения.