Заключительный этап
10 класс

1. В мешке находятся 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

2. В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

3. Найдите все натуральные числа a и b такие, что
$$a^3 - b^3 = 633p,$$
где p — некоторое простое число.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 - 6x + 8 - a)(x - a^2 + 6a - 8) = 0$$
имеет ровно два различных действительных корня.

5. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке K. На перпендикуляре к отрезку BC в точке B взята точка L такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку BC в точке C взята точка M такая, что $AM = CM$. Докажите, что K, L и M лежат на одной прямой.

III Открытая олимпиада Университета Иннополис по математике

Заключительный этап
10 класс

1. В мешке находятся 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

2. В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

3. Найдите все натуральные числа a и b такие, что
$$a^3 - b^3 = 633p,$$
где p — некоторое простое число.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 - 6x + 8 - a)(x - a^2 + 6a - 8) = 0$$
имеет ровно два различных действительных корня.

5. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке K. На перпендикуляре к отрезку BC в точке B взята точка L такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку BC в точке C взята точка M такая, что $AM = CM$. Докажите, что K, L и M лежат на одной прямой.