

Заключительный этап
11 класс

1. Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.
2. Пусть $f(x) = x^2 + 6x + 6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{2017 \text{ раз}} = 2017.$$

3. Какое наименьшее количество клеток доски 3×2016 можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка?
4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(\sqrt{6x - x^2 - 4 + a - 2})((a - 2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

5. Медианы AM_a , BM_b и CM_c треугольника ABC пересекаются в точке M . Окружность ω_a проходит через середину отрезка AM и касается стороны BC в точке M_a . Аналогично окружность ω_b проходит через середину отрезка BM и касается стороны CA в точке M_b . Пусть X и Y – точки пересечения окружностей ω_a и ω_b . Докажите, что точки X , Y и M_c лежат на одной прямой.

Заключительный этап
11 класс

1. Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.
2. Пусть $f(x) = x^2 + 6x + 6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{2017 \text{ раз}} = 2017.$$

3. Какое наименьшее количество клеток доски 3×2016 можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка?
4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(\sqrt{6x - x^2 - 4 + a - 2})((a - 2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

5. Медианы AM_a , BM_b и CM_c треугольника ABC пересекаются в точке M . Окружность ω_a проходит через середину отрезка AM и касается стороны BC в точке M_a . Аналогично окружность ω_b проходит через середину отрезка BM и касается стороны CA в точке M_b . Пусть X и Y – точки пересечения окружностей ω_a и ω_b . Докажите, что точки X , Y и M_c лежат на одной прямой.