Заключительный этап
9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовали $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010?

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$.

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим соотношениям:

a) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n?

5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0^\circ, 360^\circ]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2 y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

III Открытая олимпиада Университета Иннополис по математике

Заключительный этап
9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовали $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010?

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$.

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим соотношениям:

a) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n?

5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0^\circ, 360^\circ]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2 y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.