Материалы для проведения заключительного этапа

III ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС ПО МАТЕМАТИКЕ

2016–2017 учебный год

10-12 марта 2017 г.

Иннополис, 2017

Условия и решения задач

9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

(*М. Попов*)

Решение: Всего участвовало $3n$ человек, поэтому достаточно доказать, что $n \vdots 3$. Парни между собой сыграли $\dfrac{2n(2n-1)}{2}$ матчей, девушки между собой — $\dfrac{n(n-1)}{2}$, а матчей парень-девушка было ровно $2n^2$. Пусть m – число матчей парень-девушка, в которых выиграл парень. Следовательно, число матчей парень-девушка, в которых выиграла девушка будет $2n^2 - m$.

В итоге получаем такое соотношение

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} + 2n^2 - m}{\frac{2n(2n-1)}{2} + m} = \frac{5}{4} \Longrightarrow \frac{5n^2 - n - 2m}{4n^2 - 2n + 2m} = \frac{5}{4},$$

из которого следует, что

$$20n^2 - 4n - 8m = 20n^2 - 10n + 10m \Longrightarrow n = 3m.$$

Получаем $n \vdots 3$, что и требовалось доказать. ■

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010? (*М. Попов*)

Ответ: Нельзя.

Решение: Очевидно, что буква С $= 0$, так как число 1010 делится на 10. Заменим последнюю букву на ноль и поделим на 10. Оставшееся число ИННОПОЛИ делится на 101, поэтому знакопеременная сумма двухзначных граней делится на 101. Следовательно,

$$\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН} \vdots 101.$$

Так как все эти числа не превосходят 99, то модуль этой знакопеременной суммы не превосходит 200, а следовательно, он может быть равен только 0 или 101.

Теперь посмотрим на это выражение по модулю 10

$$|\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН}| = |10(\text{Л} - \text{П}) + 9(\text{Н} - \text{И})| \equiv$$
$$\equiv |9(\text{Н} - \text{И})| \equiv |\text{Н} - \text{И}| \pmod{10}.$$

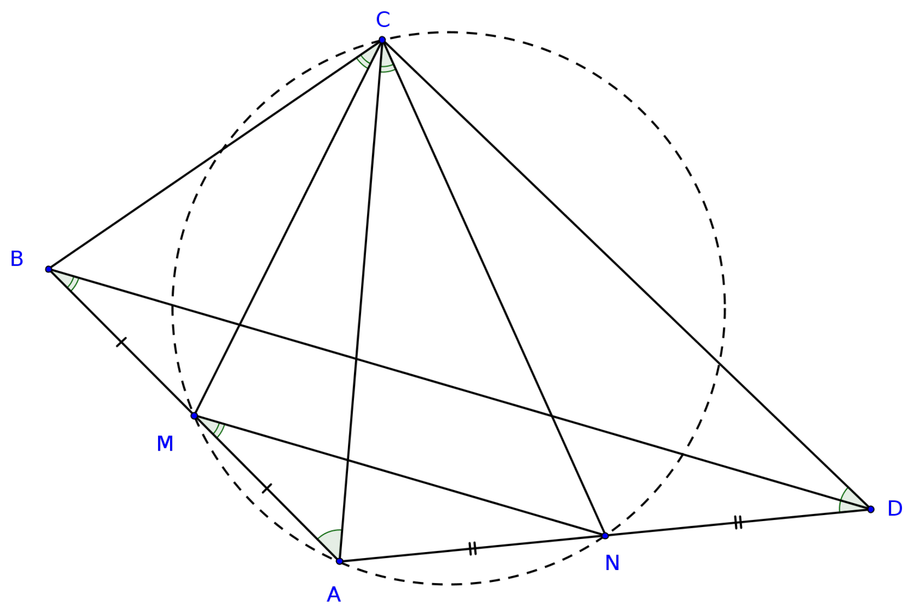
Так как разные буквы соответствуют разным цифрам, то исходный модуль не может быть равен 0. Если же он равен 101, то $|\text{Н} - \text{И}| \equiv 1 \pmod{10}$ или $|\text{Н} - \text{И}| = 1$. Но тогда

$$101 = |\text{ЛИ} - \text{ПО} + \text{НО} - \text{ИН}| \leqslant 10|\text{Л} - \text{П}| + 9|\text{Н} - \text{И}| =$$
$$= 10|\text{Л} - \text{П}| + 9 \leqslant 99.$$

Противоречие. Значит решений нет. ■

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$. (*Фольклор*)

Решение:



Пусть N – середина стороны AD. Так как $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle ADC$, то треугольники BAC и ADC подобны по двум углам. Следовательно, соответсвующие медианы в подобных треугольниках разбивают соответсвующие углы на равны части. Поэтому $\angle BCM = \angle ACN$ и $\angle ACM = \angle DCN$. Аналогично, $\angle ANC = \angle BMC$, поэтому четырехугольник

$MANC$ вписанный. Но тогда $\angle AMN = \angle ACN$. Так как MN – средняя линия треугольника ABD, то получаем

$$\angle ABD = \angle AMN = \angle ACN = \angle BCM.$$

Что и требовалось доказать. ■

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n? (*М. Попов*)

Ответ: 1343.

Решение: Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Аналогичное неравенство записываем для сумм b_i и c_i. Складывая три полученных неравенства, получаем

$$3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i) = 2017n.$$

Следовательно, мы получаем оценку сверху

$$\frac{3(n+1)}{2} \leqslant 2017 \Longrightarrow n \leqslant 1343.$$

Теперь приведем пример, на котором достигается эта оценка ($n = 1343$)

a_i	b_i	c_i
1	672	1344
2	673	1342
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
672	1343	2
673	1	1343
674	2	1341
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1343	671	3

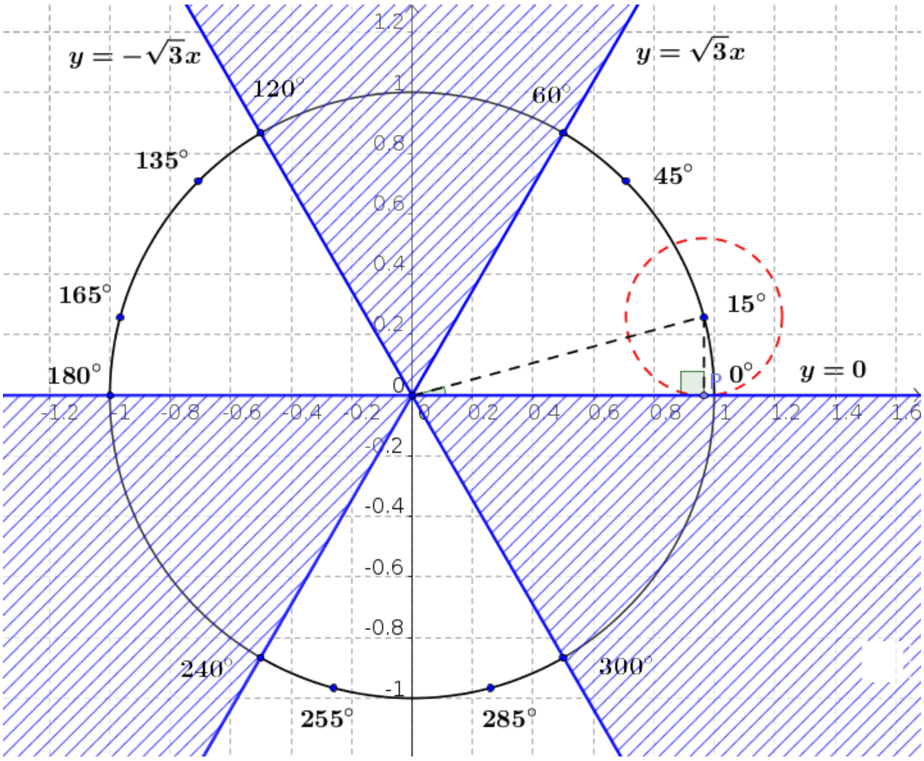
5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0°; 360°]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение. (*Р. Алишев*)

Ответ: $\alpha \in \{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$

Решение:



Заметим, что $\sin^2 15° = \dfrac{1-\cos 30°}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Перепишем нашу систему

$$\begin{cases} y(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x) \geqslant 0, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \sin^2 15°. \end{cases}$$

Заштрихованная область удовлетворяет первому неравенству. Следовательно, если рассмотреть произвольную точку $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ и провести окружность с центром в этой точке радиуса $\sin 15°$, то она должна иметь ровно одну общую точку с заштрихованной областью ($(x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2$ – расстояние от точки (x, y) до точки $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$).

Как видно из графика такое возможно тогда и только тогда, когда окружность касается одной из прямых $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ или $y = -\sqrt{3}x$ и полностью лежит вне штрихованной части. Так как радиус всех рассматриваемых окружностей равен $\sin 15°$, то касание будет происходить только для $\alpha \in \{15°, 45°, 135°, 165°, 255°, 285°\}$. ■

10 класс

1. В мешке находится 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

(*М. Попов*)

Ответ: 5 белых, 3 черных и 12 красных.

Решение: Пусть было x шариков белого цвета, y – черного и z – красного. Так как всего шариков было 20, то $x + y + z = 20$. Тогда первоначальная вероятность достать красный шарик равна

$$p_1 = \frac{z}{x+y+z} = \frac{z}{20},$$

а вероятность достать белый шарик после удвоения белых равна

$$p_2 = \frac{2x}{2x+y+z} = \frac{2x}{x+20}.$$

Теперь мы можем записать уравнение

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{z}{20} - \frac{2x}{x+20} = \frac{1}{5}$$

или

$$z \cdot (x+20) \cdot 5 - 2x \cdot 20 \cdot 5 = 20 \cdot (x+20).$$

Делим обе части на 5 и приводим подобные члены

$$zx + 20z - 44x = 80 \Longrightarrow (x+20)(44-z) = 800.$$

Осталось заметить, что так как $x+y+z = 20$ и каждый цвет присутствовал, то $20 < x + 20 < 40$. Среди делителей 800 только 25 и 32 удовлетворяют этому неравенству. Разбираем оба этих случая:

I) Пусть $x+20 = 25$, тогда $44-z = 32$. Получаем решение $x = 5$, $z = 12$ и $y = 3$.

II) Пусть $x+20=32$, тогда $44-z=25$. Получаем $x=12$, $z=19$, но тогда их должно быть больше 20. Противоречие.

Рассмотрев оба случая, мы пришли к выводу, что решение единственно $(x,y,z)=(5,3,12)$. ■

2. В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

(*Д. Мусатов*)

Решение: Нет, не верно. Пусть имеются 4 особые девочки А, Б, В и Г. Причем А дружит с Б и В, Б дружит с А и В, В дружит с А, Б и Г, Г дружит только с В. Остальные 36 девочек дружат, например, по кругу. Очевидно, что если поссорились девочки А и Б, то расселить никак не получится. ■

3. Найдите все натуральные числа a и b такие, что

$$a^3-b^3=633\cdot p$$

где p – некоторое простое число. (*М. Попов*)

Ответ: $a=16$, $b=13$.

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=3\cdot 211\cdot p \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a-b)((a-b)^2+3ab)=3\cdot 211\cdot p.$$

Заметим, что правая часть делится на 3, следовательно хотя бы один из сомножителей делится на 3. Если

$$a-b \vdots 3 \Longrightarrow (a-b)^2+3ab \vdots 3$$

и наоборот

$$(a-b)^2+3ab \vdots 3 \Longrightarrow (a-b)^2 \vdots 3 \Longrightarrow a-b \vdots 3$$

Получаем, что левая часть уравнения делится на 9, значит $3 \cdot 211 \cdot p \,\vdots\, 9$. Получаем, что $p \,\vdots\, 3$, а так как $p \in \mathbb{P}$, то $p = 3$.

В итоге получаем такое уравнение

$$(a-b)((a-b)^2 + 3ab) = 3^2 \cdot 211,$$

причем оба сомножителя положительны и делятся на 3. Заметим также, что второй сомножитель больше первого, поэтому возможет только один вариант разбиения на множители

$$\begin{cases} a - b = 3, \\ (a-b)^2 + 3ab = 3 \cdot 211. \end{cases}$$

Выражаем a и подставляем во второе уравнение

$$9 + 3(b+3)b = 3 \cdot 211 \Longrightarrow b^2 + 3b - 208 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение и получаем корни

$$b_1 = \frac{-3-29}{2} = -16 \quad \text{и} \quad b_1 = \frac{-3+29}{2} = 13.$$

Нас интересуют только натуральные числа, поэтому $a = 16$ и $b = 13$. ■

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2 - 6x + 8 - a)(x - a^2 + 6a - 8) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

(*Р. Алишев*)

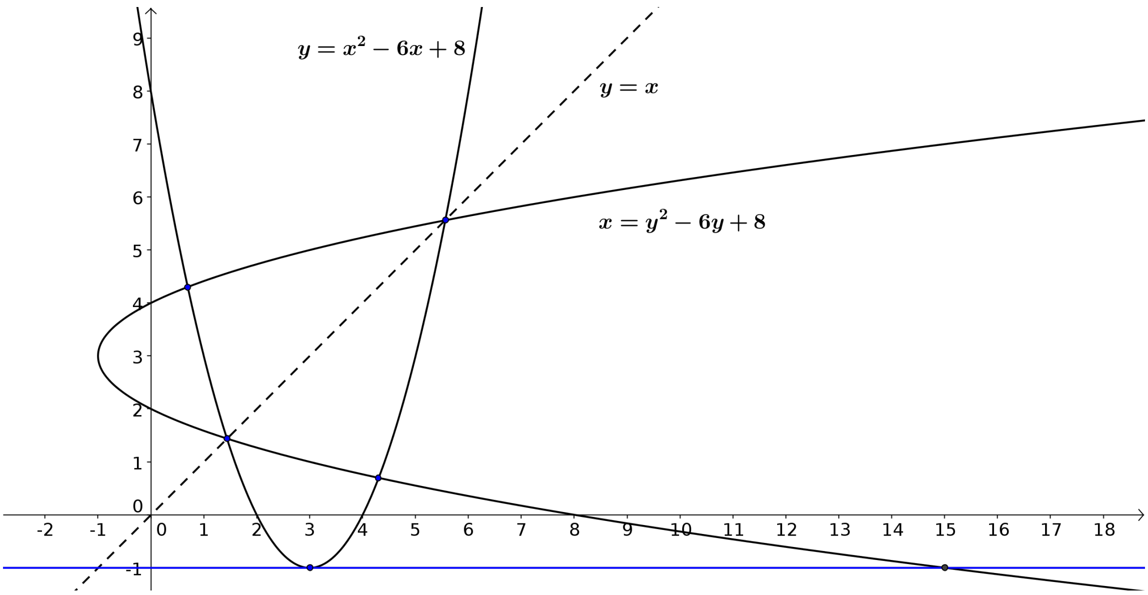
Ответ: $a \in \{-1\} \cup \left\{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$

Решение: Решать задачу будем графическим методом. Заменим a на y и нарисуем множество решений уравнения в плоскости Oxy.

Исходное уравнение эквивалентно следующей системе

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 8, \\ x = y^2 - 6y + 8. \end{array}\right.$$

График первого уравнения это парабола с ветвями направленными вверх, а график второго уравнения – парабола повернутая на 90° (см. рисунок). Причем при замене $x \leftrightarrow y$ первая парабола переходит во вторую и наоборот. Следовательно, они симметричны относительно прямой $y = x$, а значит две точки пересечения этих парабол лежат на этой прямой.



Перейдем теперь к решению задачи. Так как исходное уравнение должно иметь ровно два различных решения, то прямая $y = a$ должна пересекать обе наши параболы ровно в двух точках. Как видно из рисунка такое возможно только в пяти точках: когда прямая проходит через вершину первой параболы или когда прямая проходит через одну из точек пересечения парабол. Разберем оба этих случая:

I) Прямая проходит через вершину параболы. Вершина имеет координаты $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}) = (3; -1)$. Тогда получаем прямую $y = -1$.

II) Прямая проходит через одну из точек пересечения парабол. Точки пересечения находятся из системы

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8, \\ x = y^2 - 6y + 8. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = (y^2 - 6y + 8)^2 - 6(y^2 - 6y + 8) + 8 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^4 - 12y^3 + 46y^2 - 61y + 24 = 0.$$

Причем две из них можно найти из условия $y = x$, то есть из уравнения

$$y = y^2 - 6y + 8 \Longrightarrow y^2 - 7y + 8 = 0.$$

Поделим многочлен четвертой степени на квадратный и получим

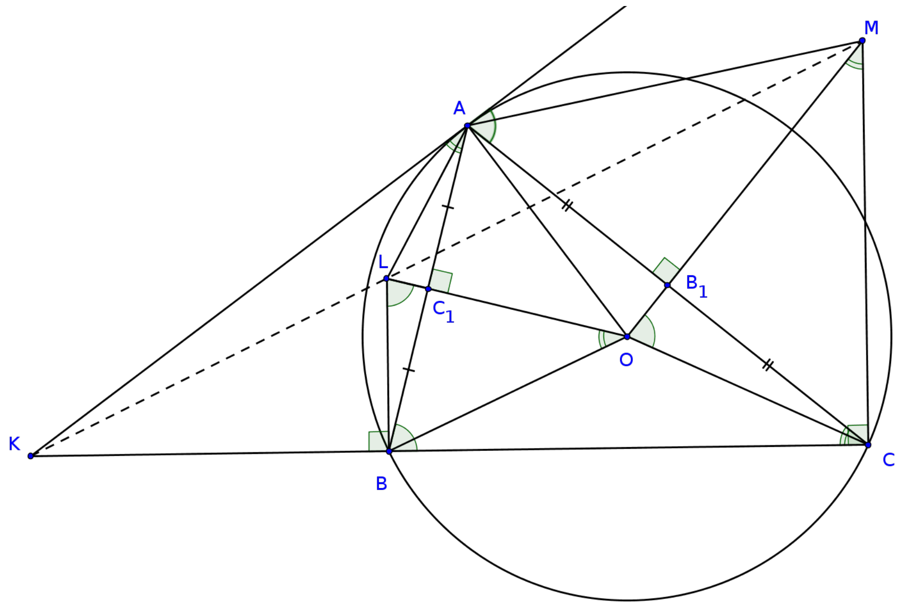
$$y^4 - 12y^3 + 46y^2 - 61y + 24 = (y^2 - 7y + 8)(y^2 - 5y + 3) = 0.$$

Теперь мы легко можем найти все четыре точки: $y = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. Итак, мы получаем пять возможных значений параметра

$$a \in \{-1\} \cup \left\{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}\right\} \cup \left\{\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\right\}. \quad \blacksquare$$

5. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке K. На перпендикуляре к отрезку BC в точке B взята точка L такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку BC в точке C взята точка M такая, что $AM = CM$. Докажите, что K, L и M лежат на одной прямой. (*М. Попов*)

Решение:



Так как $AL = LB$ и $\angle LBC = 90°$, то L – точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AB и перпендикуляра к стороне BC в точке B. Аналогично M – точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AC и перпендикуляра к стороне BC в точке C. Пусть B_1 и C_1 – середины сторон AC и AB соответственно. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC (точка пересечения серединных перпендикуляров).

Заметим, что
$$\angle CMO = \angle CMB_1 = 90^\circ - \angle MCB_1 = \\ = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle BOL$$
и
$$\angle BLO = \angle BLC_1 = 90^\circ - \angle LBC_1 = \\ = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle COM$$
Получаем, что треугольники $\triangle BLO$ и $\triangle COM$ подобны по двум углам. Следовательно, у этих треугольников соответствующие стороны и высоты пропорциональны. Пусть также R – радиус описанной окружности, то есть $R = OA = OB = OC$. Тогда получаем такие соотношения
$$\frac{BL}{R} = \frac{R}{CM} = \frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BA}{CA} \Longrightarrow \left(\frac{BA}{CA}\right)^2 = \frac{BL}{R} \cdot \frac{R}{CM} = \frac{BL}{CM}$$
Так как KA – касательная к описанной окружности треугольника ABC, то $\triangle KAB \sim \triangle KCA$. Поэтому
$$\frac{BA}{AC} = \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA} \Longrightarrow \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 = \frac{KA}{KC} \cdot \frac{KB}{KA} = \frac{KB}{KC}$$
Итак, мы получили
$$\frac{BL}{CM} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 = \frac{KB}{KC}$$
Получаем, что точки K, L и M лежат на одной прямой. ■

11 класс

1. Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.

(*Фольклор*)

Решение: Пусть арифметическая прогрессия имеет вид $c_k = a + bk$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда рассмотрим геометрическую прогрессию $d_k = a(b+1)^k$ и докажем, что все ее члены принадлежат нашей арифметической прогрессии

$$d_k = a \cdot (1 + C_k^1 \cdot b + C_k^2 \cdot b^2 + \ldots + C_k^k \cdot b^k) =$$
$$= a + b \cdot (C_k^1 + C_k^2 \cdot b + \ldots + C_k^k \cdot b^{k-1}) = c_l,$$

где $l = C_k^1 + C_k^2 \cdot b + \ldots + C_k^k \cdot b^{k-1} \in \mathbb{Z}$. ■

2. Пусть $f(x) = x^2+6x+6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2017}(x)\ldots)) = 2017.$$

(*Р. Алишев*)

Ответ: $x = -3 \pm \sqrt[2^{2017}]{2020}$.

Решение: Заметим, что $f(x) = (x+3)^2-3$ или $f(x)+3 = (x+3)^2$. Тогда

$$2020 = \underbrace{f(f(\ldots f}_{2017}(x)\ldots)) + 3 = (\underbrace{f(f(\ldots f}_{2016}(x)\ldots)) + 3)^2 =$$
$$= (\underbrace{f(f(\ldots f}_{2015}(x)\ldots)) + 3)^{2^2} = \ldots = (f(x)+3)^{2^{2016}} = (x+3)^{2^{2017}}.$$

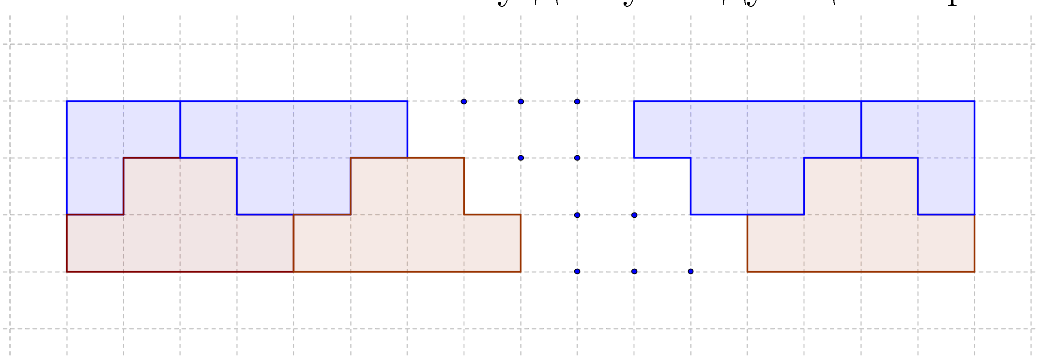
В итоге мы получили уравнение

$$(x+3)^{2^{2017}} = 2020 \Longrightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt[2^{2017}]{2020}. \quad ■$$

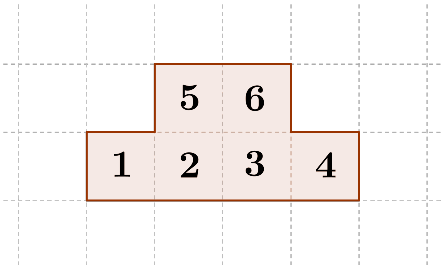
3. Какое наименьшее количество клеток доски 3×2016 можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка? (*А. Храбров*)

Ответ: 2016.

Решение: Разобьем нашу доску следующим образом:



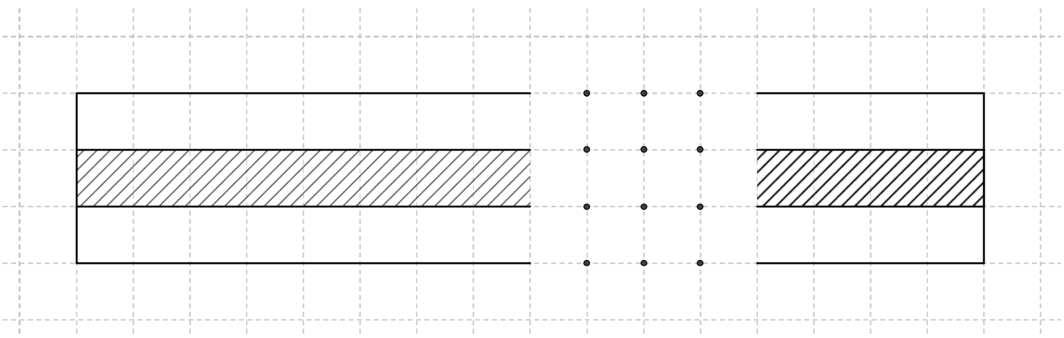
Мы получили два трехклеточных уголка и 1007 фигурок D-гексамино. В наших трехклеточных уголках должна быть закрашена хотя бы одна клетка (угловая или соседствующая с угловой). Докажем, что в каждой D-гексамино из разбиения будет закрашено хотя бы две клетки. Пронумеруем клетки произвольной D-гексамино следующим образом



Если одна из клеток 2 или 3 закрашена, то будет закрашена, соседствующая с ней клетка, принадлежащая D-гексамино. Если же ни 2, ни 3 не будут закрашены, то должны быть закрашены 1 или 5 (как сосед клетки 2) и 6 или 4 (как сосед клетки 3). В любом случае в нашем D-гексамино будет закрашено как минимум две клетки.

В итоге мы получаем оценку на число закрашенных клеток, а именно их должно быть не меньше $1007 \cdot 2 + 2 = 2016$.

Теперь приведем пример, на котором достигается эта оценка



Закрашиваем 2016 клеток, расположенных на второй горизонтали. ■

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

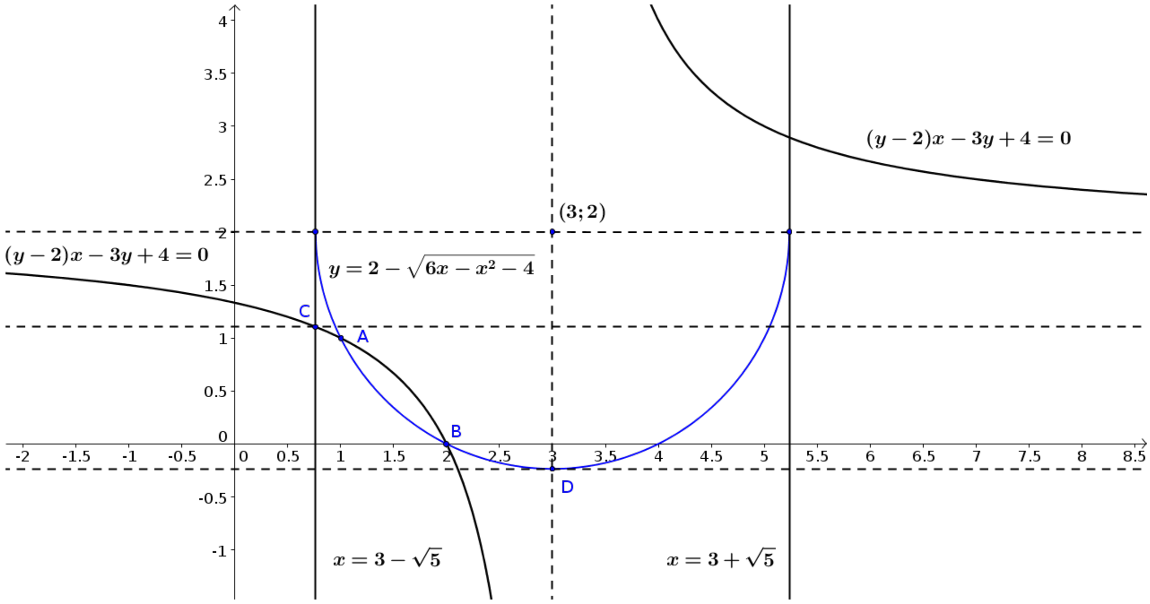
$$(\sqrt{6x - x^2 - 4} + a - 2)((a-2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

(*Р. Алишев*)

Ответ: $a \in \{2 - \sqrt{5}\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}};\ 2\right]$

Решение: Решать задачу будем графическим методом. Заменим a на y и нарисуем множество решений уравнения в плоскости Oxy.



Исходное уравнение эквивалентно следующей системе

$$\left[\begin{array}{l} y=2-\sqrt{6x-x^2-4}, \\ (y-2)x-3y+4=0; \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=5, \\ y\leqslant 2, \end{cases} \\ (x-3)(y-2)=2. \end{array}\right.$$

Первое уравнение задает полуокружность с центром в точке $(3;2)$, а второе – гиперболу с двумя асимптотами $x=3$ и $y=2$ (см. рисунок). К тому же не стоит забывать про ОДЗ: $6x-x^2-4\geqslant 0 \Longrightarrow x\in[3-\sqrt{5};\ 3+\sqrt{5}]$.

В итоге получаем, что исходное уравнение имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда прямая $y=a$ пересекает полуокружность и гиперболу ровно в двух точках в полосе $3-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{5}$. Из графика видно, что возможны три случая: прямая касается полуокружности (то есть проходит через точку D); прямая проходит через одну из точек пересечения полуокружности с гиперболой (то есть через точку A или B); прямая лежит строго выше прямой проходящей через точку C и не строго ниже прямой $y=2$. Рассмотрим все эти три случая:

I) Найдем y координату точки D:

$$y=2-\sqrt{6x-x^2-4}=2-\sqrt{6\cdot 3-3^2-4}=2-\sqrt{5}.$$

II) Найдем y координату точек A и B:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=5,\\ (x-3)(y-2)=2,\\ y\leqslant 2;\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(y-2)^4-5(y-2)^2+4=0,\\ y\leqslant 2;\end{cases}$$

Раскладываем первое уравнение на множители или решаем как биквадратное

$$\begin{cases}(y-4)y(y-3)(y-1)=0,\\ y\leqslant 2;\end{cases} \Longrightarrow y=0 \text{ или } y=1.$$

III) Найдем y координату точки C:

$$(x-3)(y-2)=2 \Longrightarrow ((3-\sqrt{5})-3)(y-2)=2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y=2-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Итак, ма получаем такие значения параметра

$$y\in\{2-\sqrt{5}\}\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}};\ 2\right]. \quad \blacksquare$$

5. Медианы AM_a, BM_b и CM_c треугольника ABC пересекаются в точке M. Окружность ω_a проходит через середину отрезка AM и касается стороны BC в точке M_a. Аналогично, окружность ω_b проходит через середину отрезка BM и касается стороны CA в точке M_b. Пусть X и Y – точки пересечения окружностей ω_a и ω_b. Докажите, что точки X, Y и M_c лежат на одной прямой. (*М. Попов*)

Решение: Лемма. *Если степень точек A и B относительно окружности ω равны $P_\omega(A)$ и $P_\omega(B)$ соответственно, то*

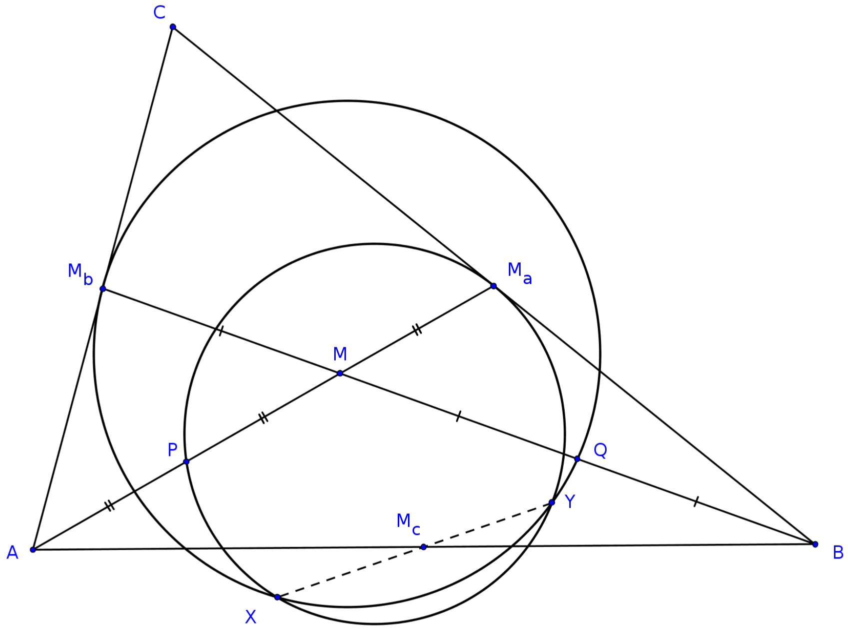
$$P_\omega(M)=\frac{2P_\omega(A)+2P_\omega(B)-AB^2}{4},$$

где M – середина отрезка AB.

Доказательство: Пусть ω – окружность с центром в точке O радиуса R, тогда по определению степени точки $P_\omega(A)=AO^2-R^2$ и $P_\omega(B)=BO^2-R^2$. Воспользуемся формулой длины медианы через стороны треугольника

$$MO^2 = \frac{2AO^2 + 2BO^2 - AB^2}{4} \Longrightarrow P_\omega(M) = MO^2 - R^2 = \\ = \frac{2P_\omega(A) + 2P_\omega(B) - AB^2}{4}. \quad \square$$

Перейдем к решению задачи.



Воспользуемся леммой для точек A и B относительно окружностей ω_a и ω_b

$$P_{\omega_a}(M_c) = \frac{2P_{\omega_a}(A) + 2P_{\omega_a}(B) - AB^2}{4} = \\ = \frac{2BM_a^2 + 2AP \cdot AM_a - AB^2}{4} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{2m_a^2}{3} - c^2}{4} = \\ = \frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2) - 6c^2}{24} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{12}$$

и

$$P_{\omega_b}(M_c) = \frac{2P_{\omega_b}(A) + 2P_{\omega_b}(B) - AB^2}{4} = \\ = \frac{2AM_b^2 + 2BQ \cdot BM_b - AB^2}{4} = \frac{\frac{b^2}{2} + \frac{2m_b^2}{3} - c^2}{4} = \\ = \frac{3b^2 + (2a^2 + 2c^2 - b^2) - 6c^2}{24} = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{12}.$$

Итак, мы получили, что $P_{\omega_a}(M_c) = P_{\omega_b}(M_c)$, а значит M_c лежит на радикальной оси ω_a и ω_b, то есть на прямой XY. $\blacksquare$