

## Заключительный этап

## 11 класс

- 11.1.** У натурального числа  $n$  взяли наименьший делитель  $a$ , отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель  $b$ . Оказалось, что  $n = a^a + b^b$ . Найдите  $n$ .
- 11.2.** Даны натуральные числа  $m$  и  $n$ . На столе лежат две кучи: в первой куче  $n$  камней, а во второй куче  $m$  камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких  $m$  и  $n$  Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи?
- 11.3.** На прямой  $\ell$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$  и  $AB < BC$ . Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , радиусы которых больше  $AB$ , но меньше  $BC$ , лежат по разные стороны от прямой  $\ell$  и касаются её в точке  $B$ . Пусть  $K$  — точка пересечения касательной к  $\omega_1$ , проведенной из точки  $A$ , и касательной к  $\omega_2$ , проведенной из точки  $C$ , а  $L$  — точка пересечения касательной к  $\omega_2$ , проведенной из точки  $A$ , и касательной к  $\omega_1$ , проведенной из точки  $C$ . Докажите, что четырехугольник  $AKCL$  — описанный.
- 11.4.** Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , для которых неравенство
- $$|x^2 + ax + b| \leq \frac{1}{8}$$
- выполняется для всех значений  $x \in [0; 1]$ .
- 11.5.** На плоскости отмечено  $4n + 2$  точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно  $n$  красных и ровно  $n$  зеленых точек.