ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

9 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же и c — что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + b/2$, $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Чему равняется в этом случае n?

Ответ: -20.

2. **(5 баллов)** Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{11}}$ на 7.

Ответ: 2

3. **(7 баллов)** За круглым столом сидят 15 человек. Разрешается любых двоих людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее количество таких перестановок надо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались соседями, но сидели в обратном порядке?

Ответ: 49.

4. **(7 баллов)** Равносторонний треугольник поворачивают относительно центра на 3°, потом на 9°, на 27°, и т.д. (на n-м шаге его поворачивают на $(3^n)^\circ$). Сколько всего разных положений будет занимать треугольник в ходе этой деятельности (включая начальное)?

Ответ: 4

5. **(8 баллов)** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Ответ: 18

6. **(8 баллов)** В квадрате $ABCD$ со стороной 12 диагональ BD пересекает отрезки CM и CK в точках N и L соответственно (M и K – середины сторон AB и AD соответственно). Чему равна площадь четырехугольника $MNLK$?

Ответ: 30

7. **(10 баллов)** Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{624}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

Ответ: 0.96

8. **(10 баллов)** Каждое положительное рациональное число встречается в бесконечном количестве позиций в следующей последовательности:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Найдите номер позиции, в котором число $\dfrac{1}{2}$ встречается 10-ый раз.

Ответ: 426

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Окружность с центром в середине основания BC касается боковых сторон равнобедренного треугольника ABC. Касательная к этой окружности пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$BP \cdot CQ = \frac{BC^2}{4}.$$

Решение. Пусть M — середина стороны BC. PM и QM являются биссектрисами углов BPQ и CQP соответственно. Следовательно $\angle BPM = \angle QPM = \alpha$ и $\angle CQM = \angle PQM = \beta$. Также по условию $\angle ABC = \angle ACB = \gamma$. Тогда сумма улов четырёхугольника $BPQC$ равна $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Поэтому $\angle PMB = \beta$ и $\angle QMC = \alpha$. Таким образом, $\triangle PMB \sim \triangle MQC$ по трём углам. Откуда $PB/MC = BM/CQ$, то есть $BP \cdot CQ = BC^2/4$. Что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Даны различные натуральные числа a, b, c, d, для которых выполняются следующие условия: $a > d$, $ab = cd$ и $a+b+c+d = ac$. Найдите сумму всех четырёх чисел.

Ответ: 12

Решение. Из соотношений $a > d$ и $ab = cd$ имеем неравенство $b < c$.

Докажем, что одно из чисел a, c не превосходит 3. Предположим противное. Тогда имеем неравенства $\frac{ac}{2} \geqslant 2a > a + d$ и $\frac{ac}{2} \geqslant 2c > b + c$. Сложив их, получим противоречие с условием.

Итак, предположим без ограничения общности, что $a \geqslant 3$. Поскольку a натуральное, то $a \in \{1, 2, 3\}$. Кроме того, d — натуральное число, меньшее a, значит, $a \neq 1$. Разберём два случая.

Случай 1. $a = 3$. Соотношения переписываются в виде

$$3b = cd, 3 + b + c + d = 3c, 3 > d.$$

Из последнего неравенства, в частности, следует, что $(3, d) = 1$. Значит, $3 \mid c$. Поскольку все числа различны, $c \geqslant 6$. Тогда имеем цепочку неравенств

$$3 + b + c + d < 6 + b + c < 6 + 2c < 3c,$$

что противоречит условию.

Случай 2. $a = 2$. Из неравенства $a > d$ следует, что $d = 1$. Соотношения переписываются в виде $2b = c, 3 + b = c$. Единственным решением этой системы уравнений является пара $(b, c) = (3, 6)$. Находим решение $(2, 3, 6, 1)$, сумма которых равна 12.