Заключительный этап
9 класс

1. В таблице 4×4 расставлены 16 различных натуральных чисел. Для каждой строки и каждого столбца таблицы нашли наибольший общий делитель расположенных в нем чисел. Оказалось, что все найденные восемь чисел различны. Для какого наибольшего n можно утверждать, что в такой таблице найдется число, не меньшее n?

2. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство
$$a+b+c+d+\frac{8}{ab+bc+cd+da} \geqslant 6.$$

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{3-2x} - y + 11 = 0, \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 4x + 16 = 0. \end{cases}$$

4. На высоте AH остроугольного треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне BC отмечена точка L. Оказалось, что $\frac{AK}{HK} = \frac{BL}{CL}$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AL. Докажите, что прямая KL касается описанной окружности треугольника CLP.

5. Два разбойника делят добычу, состоящую из монет достоинством в нечетное число тугриков от 1 до 2017. Известно, что в сумме у них четное число тугриков и для любого нечетного k, не превосходящего 2017, в их добыче есть монета достоинством в k тугриков. Докажите, что разбойники смогут поровну разделить добычу.

IV олимпиада Университета Иннополис по математике INNOPOLIS OPEN 2018

Заключительный этап
9 класс

1. В таблице 4×4 расставлены 16 различных натуральных чисел. Для каждой строки и каждого столбца таблицы нашли наибольший общий делитель расположенных в нем чисел. Оказалось, что все найденные восемь чисел различны. Для какого наибольшего n можно утверждать, что в такой таблице найдется число, не меньшее n?

2. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство
$$a+b+c+d+\frac{8}{ab+bc+cd+da} \geqslant 6.$$

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{3-2x} - y + 11 = 0, \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 4x + 16 = 0. \end{cases}$$

4. На высоте AH остроугольного треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне BC отмечена точка L. Оказалось, что $\frac{AK}{HK} = \frac{BL}{CL}$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AL. Докажите, что прямая KL касается описанной окружности треугольника CLP.

5. Два разбойника делят добычу, состоящую из монет достоинством в нечетное число тугриков от 1 до 2017. Известно, что в сумме у них четное число тугриков и для любого нечетного k, не превосходящего 2017, в их добыче есть монета достоинством в k тугриков. Докажите, что разбойники смогут поровну разделить добычу.

Заключительный этап
10 класс

1. Вася написал на страницах 18-листовой тетради натуральные числа. На каждой странице он написал не менее 10 различных чисел, а на каждых из трёх подряд идущих страниц не более 20 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел Вася мог написать на страницах тетради?

2. Для каких натуральных чисел n найдется такое натуральное k, что число $2k^2 + k + 2018$ делится на $n!$ (как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$)?

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y + 5 = 2\sqrt{2z + 5}, \\ 2y^2 + 3z + 5 = 2\sqrt{2x + 5}, \\ 2z^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{2y + 5}. \end{cases}$$

4. Пусть h — длина наибольшей высоты в треугольнике, R — радиус описанной окружности, m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника. Докажите неравенство $m_a + m_b + m_c \leqslant 3R + h$.

5. Несколько человек сыграли однокруговой турнир по настольному теннису. По окончании турнира оказалось, что для любых четырех участников найдутся двое, набравшие поровну очков в играх между этими четырьмя участниками. Какое наибольшее количество теннисистов могло принимать участие в этом турнире? В настольном теннисе не бывает ничьих, за победу дается одно очко, за поражение — ноль очков.

IV олимпиада Университета Иннополис по математике INNOPOLIS OPEN 2018

Заключительный этап
10 класс

1. Вася написал на страницах 18-листовой тетради натуральные числа. На каждой странице он написал не менее 10 различных чисел, а на каждых из трёх подряд идущих страниц не более 20 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел Вася мог написать на страницах тетради?

2. Для каких натуральных чисел n найдется такое натуральное k, что число $2k^2 + k + 2018$ делится на $n!$ (как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$)?

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y + 5 = 2\sqrt{2z + 5}, \\ 2y^2 + 3z + 5 = 2\sqrt{2x + 5}, \\ 2z^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{2y + 5}. \end{cases}$$

4. Пусть h — длина наибольшей высоты в треугольнике, R — радиус описанной окружности, m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника. Докажите неравенство $m_a + m_b + m_c \leqslant 3R + h$.

5. Несколько человек сыграли однокруговой турнир по настольному теннису. По окончании турнира оказалось, что для любых четырех участников найдутся двое, набравшие поровну очков в играх между этими четырьмя участниками. Какое наибольшее количество теннисистов могло принимать участие в этом турнире? В настольном теннисе не бывает ничьих, за победу дается одно очко, за поражение — ноль очков.

Заключительный этап
11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n.

2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи?

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный.

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство
$$|x^2 + ax + b| \leqslant \frac{1}{8}$$
выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$.

5. На плоскости отмечено $4n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.

IV олимпиада Университета Иннополис по математике INNOPOLIS OPEN 2018

Заключительный этап
11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n.

2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи?

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный.

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство
$$|x^2 + ax + b| \leqslant \frac{1}{8}$$
выполняется для всех значений $x \in [0; 1]$.

5. На плоскости отмечено $4n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.