Материалы для проведения заключительного этапа

IV ОЛИМПИАДЫ УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС ПО МАТЕМАТИКЕ

INNOPOLIS OPEN 2018

9-11 марта 2018 г.

Иннополис, 2018

Условия и решения задач
9 класс

1. В таблице 4×4 расставлены 16 различных натуральных чисел. Для каждой строки и каждого столбца таблицы нашли наибольший общий делитель расположенных в нем чисел. Оказалось, что все найденные восемь чисел различны. Для какого наибольшего n можно утверждать, что в такой таблице найдется число, не меньшее n? *(А. Храбров)*

Ответ: 32.

Решение. Если в каком-то ряду наибольший общий делитель равен n, то в нем есть четыре числа, делящихся на n, а, значит, число, не меньшее, чем $4n$. Поскольку наибольшие общие делители во всех рядах различны, один из них заведомо не меньше 8. Тогда в соответствующем ему ряду должно быть число, не меньшее 32. Приведем теперь пример таблицы, в которой все числа не больше 32. Наибольшие общие делители по строкам равны 5, 6, 7 и 8, а по столбцам равны 1, 2, 3 и 4.

5	10	15	20
30	6	18	12
7	14	21	28
8	16	24	32

Замечание. Наибольшие общие делители заведомо должны быть числами от 1 до 8, а ряды с НОДами 6, 7 и 8 должны быть составлены из тех чисел, которые стоят в соответствующих рядах в таблице из примера (возможно в другом порядке). ■

2. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство
$$a+b+c+d+\frac{8}{ab+bc+cd+da} \geqslant 6.$$
(А. Храбров)

Первое решение. Положим $x = a+b+c+d$ и $y^2 = ab+bc+cd+da$. Поскольку
$$x^2 = \big((a+c)+(b+d)\big)^2 \geqslant 4(a+c)(b+d) = 4y^2,$$
имеем неравенство $x \geqslant 2y$. Запишем доказываемое неравенство в новых обозначениях: $x+\frac{8}{y^2} \geqslant 6$. Достаточно проверить, что
$$2y + \frac{8}{y^2} \geqslant 6.$$
После сокращения на 2 и приведения к общему знаменателю получится неравенство $y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2 \geqslant 0$. Последнее очевидно, поскольку $y > 0$.

Второе решение. По неравенству Коши для трех положительных чисел:
$$(a+c)+(b+d)+\frac{8}{(a+c)(b+d)} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+c)\cdot(b+d)\cdot 8}{(a+c)(b+d)}} = 6.$$
■

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{3-2x} - y + 11 = 0, \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 4x + 16 = 0. \end{cases}$$

(*Р. Алишев*)

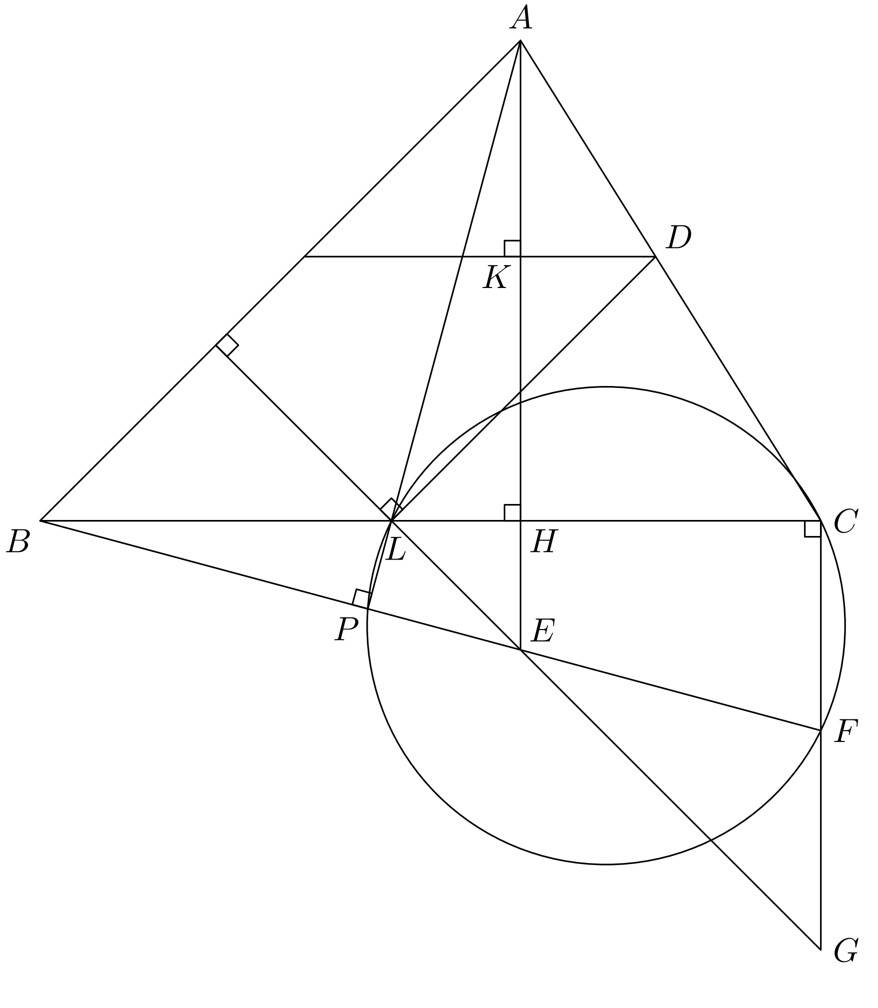
Ответ: $x = -3$, $y = 2$.

Решение. Сложим эти уравнения и соберем полные квадраты: $x^2 + 4x - 6\sqrt{3-2x} + y^2 - y - 4\sqrt{3y-2} + 27 = x^2 + 6x+9+3-2x-6\sqrt{3-2x}+9+y^2-4y+4+3y-2-4\sqrt{3y-2}+4 = (x+3)^2+(\sqrt{3-2x}-3)^2+(y-2)^2+(\sqrt{3y-2}-2)^2 = 0$. Очевидно, что только при $x = -3$ и $y = 2$ квадраты принимают свои наименьшие значения, равные нулю. Подстановкой найденных значений переменных в исходную систему убеждаемся, что они удовлетворяют обоим равенствам. ■

4. На высоте AH остроугольного треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне BC отмечена точка L. Оказалось, что $\frac{AK}{HK} = \frac{BL}{CL}$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AL. Докажите, что прямая KL касается описанной окружности треугольника CLP.

(*М. Стынян*)

Первое решение. Через точку K проведем прямую, параллельную стороне BC. Обозначим через D точку её пересечения со стороной AC. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KH} = \frac{BL}{LC}$. Следовательно, прямые DL и AB параллельны. Поэтому треугольники ABC и DLC подобны и, значит, $\frac{AB}{DL} = \frac{BC}{LC}$ и $\frac{BC}{BL} = \frac{AC}{AD}$.



Пусть точка L лежит между точками B и H. Обозначим через E точку пересечения прямых AH и BP. Тогда в треугольнике ABE прямые AH и BP являются высотами. Значит, точка L является ортоцентром треугольника ABE.

Поэтому прямая EL также является высотой и, значит, EL перпендикулярно прямым AB и DL. Через точку C проведем прямую, параллельную AH, точки её пересечения с прямыми BE и LE через F и G соответственно.

Поскольку L — ортоцентр треугольника ABE, $\angle ABH = \angle AEL = \angle FGE$. Аналогично, $\angle BAL = \angle BEL = \angle FEG$. Стало быть, треугольники ALB и EFG подобны по двум углам.

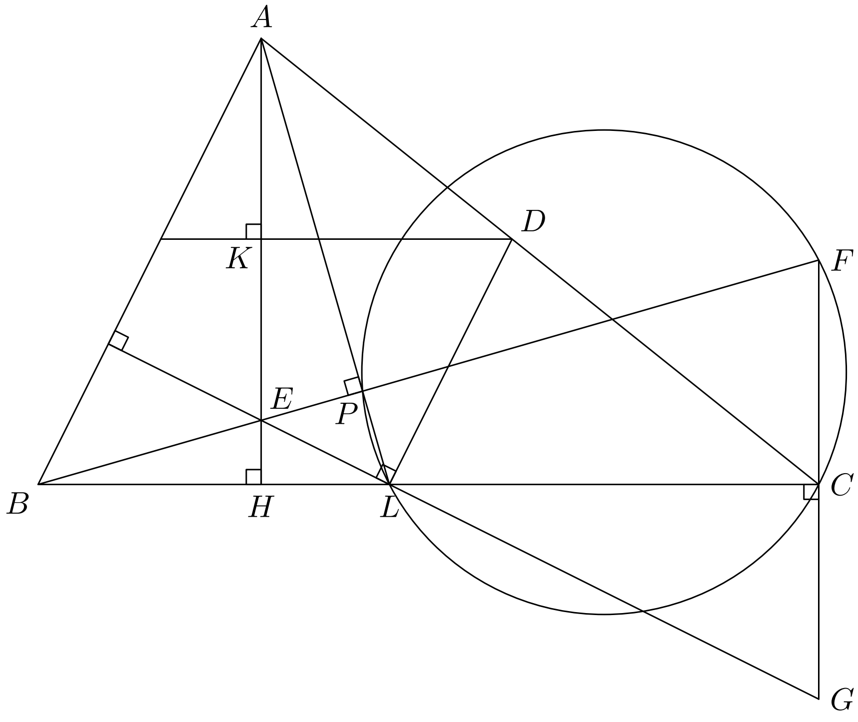
Значит, $\frac{EG}{FG} = \frac{AB}{LB}$. По теореме Фалеса для прямых AE и CG имеем $\frac{LG}{EG} = \frac{LC}{HC}$. Отметим также, что из параллельности прямых KD и HC следует равенство $\frac{HC}{KD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BL}$. Соберем все полученные отношения вместе:

$$\begin{aligned}\frac{LG}{FG} &= \frac{LG}{EG} \cdot \frac{EG}{FG} = \frac{LC}{HC} \cdot \frac{AB}{LB} = \frac{LC}{HC} \cdot \frac{AB}{LD} \cdot \frac{LD}{BL} \\ &= \frac{LC}{HC} \cdot \frac{BC}{LC} \cdot \frac{LD}{BL} = \frac{BC}{HC} \cdot \frac{LD}{BL} = \frac{HC}{HC} \cdot \frac{LD}{KD} = \frac{LD}{KD}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что треугольники LGF и LDK подобны ($\angle FGE = \angle ABH = \angle LDK$, последнее равенство следует из того, что $KD \parallel BL$ и $DL \parallel AB$). Тогда $\angle GLF = \angle DLK$ и, значит, угол между прямыми KL и LF равен углу между прямыми LD и LG, таким образом, прямые KL и LF перпендикулярны.

Осталось заметить, что поскольку $\angle LCF = \angle LPF = 90^\circ$, четырехугольник $CLPF$ является описанным и отрезок LF является диаметром окружности, описанной вокруг него. Тогда отрезок LF является и диаметром описанной окружности треугольника CLP, а поскольку он перпендикулярен прямой KL, она является касательной к этой окружности.

Если точка L лежит между точками C и H, то вычисление углов для проверки подобия треугольников ALB и EFG немного изменится. А именно, в треугольнике ABL прямые AH и BP являются высотами. Значит, точка E является ортоцентром треугольника ABL. Тогда $\angle ABL = \angle LEH = \angle FGE$ и $\angle BAL = \angle FEG$.



Второе решение. Пусть прямая BP пересекает описанную окружность треугольника CLP в точке F. Равенство углов $\angle LAH = \angle LBP$ очевидно. Отсюда вытекает подобие треугольников $\triangle ALH \sim \triangle BFC$. Рассмотрим поворотную гомотетию с коэффициентом $\frac{BC}{AH}$ и углом 90°, переводящую $\triangle ALH$ в $\triangle BFC$. Эта гомотетия точку K переведет в точку L, а точку L — в точку F. Поэтому прямые KL и BL перпендикулярны, так как переходят друг в друга. FL является диаметром окружности, а KL перпендикуляр, следовательно, касательная.

Третье решение. Достаточно доказать, что KL образует с секущей AL угол, равный $\angle LCP$. Равенство углов $\angle LAH = \angle LBP$ очевидно. Высоты треугольника ABL обратно пропорциональны сторонам: $\frac{AL}{BL} = \frac{AH}{BP}$. Откуда нехитрыми преобразованиями получаем

$$\frac{AL}{BC} = \frac{BL}{BC} \cdot \frac{AH}{BP} = \frac{AK}{AH} \cdot \frac{AH}{BP} = \frac{AK}{BP}.$$

Тогда треугольники AKL и BPC подобны по второму признаку. Их соответствующие углы ALK и BCP равны, чего и требовалось. ■

5. Два разбойника делят добычу, состоящую из монет достоинством в нечетное число тугриков от 1 до 2017. Известно, что в сумме у них четное число тугриков и для любого нечетного k, не превосходящего 2017, в их добыче есть монета достоинством в k тугриков. Докажите, что разбойники смогут поровну разделить добычу.

(А. Храбров по мотивам задачи В. Франка)

Решение. Пусть разбойники делят сумму в $2n$ монет. Предположим, что они не могут поделить их поровну. Выдадим первому разбойнику наибольшую возможную сумму s, которая меньше n. Тогда он получит монет на сумму в $s \leqslant n-1$ тугриков. Остальные монеты отдадим второму. Если бы у второго оказалась монета в один тугрик, то, передав ее первому, он смог бы увеличить сумму первого на 1 и в итоге у первого бы оказалось $s + 1 \leqslant n$ монет. Это противоречит тому, что у первого наибольшая возможная сумма, меньшая n. Значит, все монеты в один тугрик достались первому. Рассмотрим теперь наименьшую по достоинству монету, которая досталась второму. Пусть это m $(m > 3)$ тугриков. Тогда монета в $m - 2$ тугрика досталась первому. Если мы поменяем монеты в 1 и $m-2$ тугрика, которые есть у первого, на монету в m тугриков, которая есть у второго, то мы увеличим сумму у первого на 1 тугрик. Но это снова противоречит тому, что у первого наибольшая возможная сумма, меньшая n. Значит, исходное предположение неверно и монеты можно поделить поровну. Осталось разобрать случай $m = 3$. Предыдущий алгоритм не работает в случае, когда монеты 1 тугрик и $m - 2$ тугрик одна и та же. Причем у первого сумма всех монет $n-1$ тугрик, а у втрого — $n+1$. Тогда обязательно существуют монеты достонинствами у первого $2k-1$, у второго $2k+1$ тугрик, которые можно обменять так, чтобы у первого сумма выросла на 1. ■

10 класс

1. Вася написал на страницах 18-листовой тетради натуральные числа. На каждой странице он написал не менее 10 различных чисел, а на каждых из трёх подряд идущих страниц не более 20 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел Вася мог написать на страницах тетради? (*А. Храбров*)

Ответ: 190.

Решение. Рассмотрим идущие подряд две страницы, среди которых нет первой. Пусть у них номера n и $n+1$. Тогда на странице $n-1$ есть не менее 10 различных чисел, а на страницах $n-1$, n и $n+1$ не более 20 различных чисел. Следовательно, страницы n и $n+1$ добавляют к числам на предыдущих страницах не более 10 новых чисел.

На первых трех страницах вместе Вася написал не более 20 различных чисел. На четвертой и пятой страницах не более 10 новых чисел, на шестой и седьмой страницах не более 10 новых чисел и т.д.. А на последних трех страницах не более 20 различных чисел. Итого получаем, что у Васи в тетрадке не более $20+15\cdot10+20 = 190$ различных чисел. Приведем пример, показывающий, что Вася мог написать 190 различных чисел. На первой странице напишем числа от 1 до 10, на второй и третьей страницах — числа от 11 до 20, на четвертой и пятой страницах — числа от 21 до 30 и т.д.. На страницах с номерами $2k$ и $2k+1$ напишем числа от $10k+1$ до $10k+10$. Легко видеть, что на любых трех подряд идущих страницах не более 20 различных чисел, а всего написаны числа от 1 до 190.■

2. Для каких натуральных чисел n найдется такое натуральное k, что число $2k^2+k+2018$ делится на $n!$ (как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$)? (*А. Храбров*)

Ответ: $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

Решение. Рассмотрим остатки от деления числа $2k^2 + k$ на 5: $2 \cdot 0^2 + 0 = 0$ дает остаток 0, $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ дает остаток 3, $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ дает остаток 0, $2 \cdot 3^2 + 3 = 21$ дает остаток 1 и $2 \cdot 4^2 + 4 = 36$ дает остаток 1. Следовательно, остаток числа $2k^2 + k$ от деления на 5 не может быть равен 2. Стало быть, $2k^2 + k + 2018$ не может делиться на 5. Поскольку при $n \geqslant 5$ число $n!$ делится на 5, числа $n \geqslant 5$ заведомо не подходят. Для остальных натуральных n такое k предъявить несложно, например, подойдет $k = 14$, так как $2 \cdot 14^2 + 14 + 2018 = 2424 = 24 \cdot 101$ делится на $4!$.■

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y + 5 = 2\sqrt{2z+5}, \\ 2y^2 + 3z + 5 = 2\sqrt{2x+5}, \\ 2z^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{2y+5}. \end{cases}$$

(*Р. Алишев*)

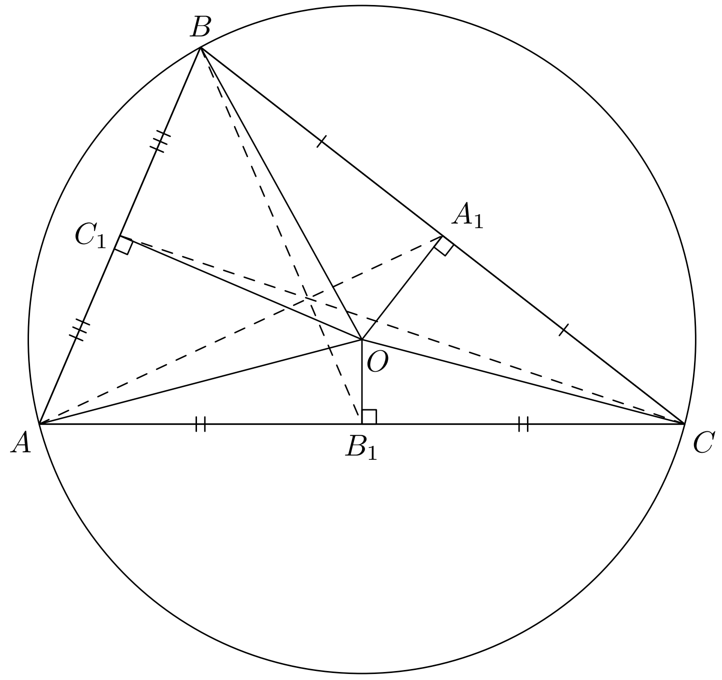
Ответ: $x = y = z = -0,5.$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 + 3t + 5 - 2\sqrt{2t+5}$. Она приводится к виду $f(t) = \frac{1}{2}(2t+1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2t+5} - 2)^2$. Очевидно, что $f(t) \geqslant 0$ и равенство достигается только в точке $t = -0,5$. Если сложим левые и правые стороны нашей системы, то получим уравнение $f(x) + f(y) + f(z) = 0$, которая имеет решение только при $x = y = z = -0,5$. ■

4. Пусть h — длина наибольшей высоты в треугольнике, R — радиус описанной окружности, m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника. Докажите неравенство $m_a + m_b + m_c \leqslant 3R + h$.

(*А. Храбров*)

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором провели медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть для определенности наименьшая сторона треугольника — сторона AB. Тогда h — высота, опущенная на AB. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника. Тогда отрезок OA_1 перпендикулярен стороне BC, отрезок OB_1 перпендикулярен стороне CA и отрезок OC_1 перпендикулярен стороне AB.



По неравенству треугольника $AA_1 \leqslant AO + OA_1 = R + OA_1$. Аналогично $BB_1 \leqslant R + OB_1$ и $CC_1 \leqslant R + OC_1$. Поэтому

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 \leqslant 3R + OA_1 + OB_1 + OC_1$$

и достаточно доказать, что $OA_1 + OB_1 + OC_1 \leqslant h$. Домножим доказываемое неравенство на $\frac{1}{2}AB$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h \cdot AB &= S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = \\ &= \frac{1}{2}OC_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OA_1 \cdot BC + \frac{1}{2}OB_1 \cdot CA \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}OC_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OA_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OB_1 \cdot AB = \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot (OA_1 + OB_1 + OC_1). \blacksquare\end{aligned}$$

5. Несколько человек сыграли однокруговой турнир по настольному теннису. По окончании турнира оказалось, что для любых четырех участников найдутся двое, набравшие поровну очков в играх между этими четырьмя участниками. Какое наибольшее количество теннисистов могло принимать участие в этом турнире? В настольном теннисе не бывает ничьих, за победу дается одно очко, за поражение — ноль очков.

(*из материалов зарубежных олимпиад*)

Ответ: 7 теннисистов.

Решение. Пусть в турнире участвовало $n \geqslant 8$ теннисистов. Тогда всего было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий и, значит, одержано $\frac{1}{2}n(n-1)$ побед. Тогда найдется участник, который одержал не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$ побед. Поэтому какой-то участник одержал хотя бы 4 победы.

Назовем его Андреем. Рассмотрим тех, у кого он выиграл. Пусть это будут Боря, Вася, Гриша и Дима. В матчах между ними было сыграно 6 партий, поэтому кто-то из них одержал хотя бы две победы.

Пусть для определенности это будет Боря и выиграл он у Васи и Гриши. Тогда рассмотрим четверку игроков Андрей, Боря, Вася и Гриша. Андрей в матчах между этими четырьмя игроками все матчи выиграл, поэтому набрал три очка, Боря выиграл ровно два матча, поэтому набрал два очка, победитель матча Васи с Гришей набрал одно, а проигравший очков не набрал.

Поэтому у них в матчах друг с другом набрано разное количество очков и, значит, такая четверка не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, игроков не больше семи.

Приведем пример турнира с семью участниками. Победа обозначена плюсом, поражение — минусом.

	+	+	+	−	−	−
−		+	−	+	+	−
−	−		+	+	−	+
−	+	−		−	+	+
+	−	−	+		+	−
+	−	+	−	−		+
+	+	−	−	+	−	

■

11 класс

1. У натурального числа n взяли наименьший делитель a, отличный от 1, и следующий за ним по величине делитель b. Оказалось, что $n = a^a + b^b$. Найдите n. (*А. Храбров*)

Ответ: $n = 2^2 + 4^4 = 260$.

Решение. Если n нечетно, то все его делители также нечетны. Тогда a и b нечетны и $a^a + b^b$ — четно. Поэтому n — четно. Тогда его наименьший делитель, отличный от 1, это 2 и, значит, $a = 2$. Стало быть, $n = 2^2 + b^b$. Следовательно, $4 = n - b^b$ делится на b. Тогда $b = 4$, поскольку $b > 2$. Таким образом, $n = 2^2 + 4^4 = 260$.■

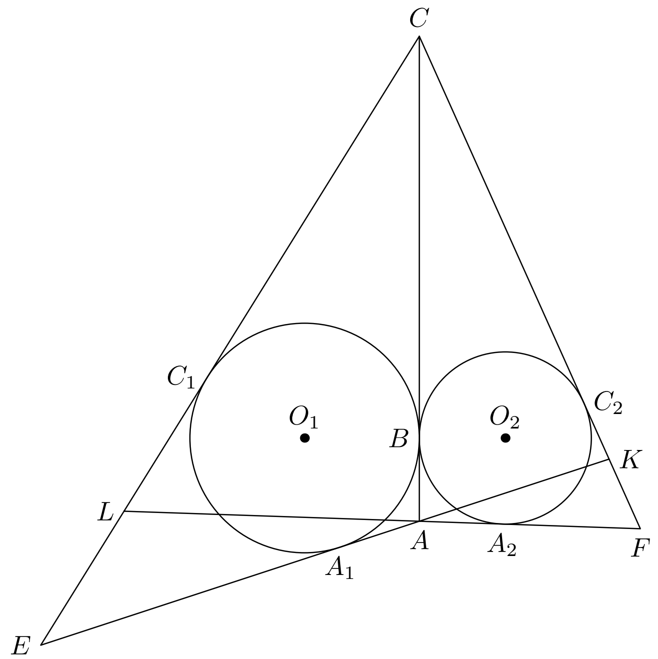
2. Даны натуральные числа m и n. На столе лежат две кучи: в первой куче n камней, а во второй куче m камней. Петя и Вася играют в следующую игру. Начинает Петя. За один ход можно разбить одну из имеющихся на столе куч на несколько меньших. Проигрывает не имеющий хода. При каких m и n Петя может обеспечить себе победу вне зависимости от игры Васи? (*А. Храбров*)

Ответ: $m \neq n$.

Решение. Если $m = n$, Вася сможет повторять ходы Пети и, значит, всегда сможет сделать ход. Пусть $m > n$. Тогда Петя разобьет кучу с m камнями на кучу с n камнями и $m - n$ куч по одному камню. С кучами по одному камню больше ничего делать нельзя, поэтому дальше игра будет происходить с двумя кучами по n камней. И здесь Петя будет повторять ходы Васи и, значит, всегда сможет сделать ход.■

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B и C. Точка B лежит между точками A и C и $AB < BC$. Две окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых больше AB, но меньше BC, лежат по разные стороны от прямой ℓ и касаются её в точке B. Пусть K — точка пересечения касательной к ω_1, проведенной из точки A, и касательной к ω_2, проведенной из точки C, а L — точка пересечения касательной к ω_2, проведенной из точки A, и касательной к ω_1, проведенной из точки C. Докажите, что четырехугольник $AKCL$ — описанный. (*фольклор*)

Решение.



Пусть касательные из точки A к окружностям ω_1 и ω_2 касаются их в точках A_1 и A_2 соответственно, а касательные из точки C к окружностям ω_1 и ω_2 касаются их в точках C_1 и C_2 соответственно. Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и CC_1 через E, а точку пересечения прямых AA_2 и CC_2 через F.

Докажем, что невыпуклый четырехугольник $AECF$ — описанный. Для этого проверим, что $AE + CF = AF + CE$:

$$AE + CF = AA_1 + EA_1 + CC_2 + FC_2 = AB + EA_1 + CB + FC_2 =$$
$$= AA_2 + EA_1 + CC_1 + FC_2 = AA_2 + EC_1 + CC_1 + FA_2 = AF + CE.$$

Но тогда выпуклый четырехугольник $AKCL$ описан вокруг той же окружности.■

4. Найдите все значения параметров a и b, для которых неравенство

$$|x^2+ax+b| \leqslant \frac{1}{8}$$

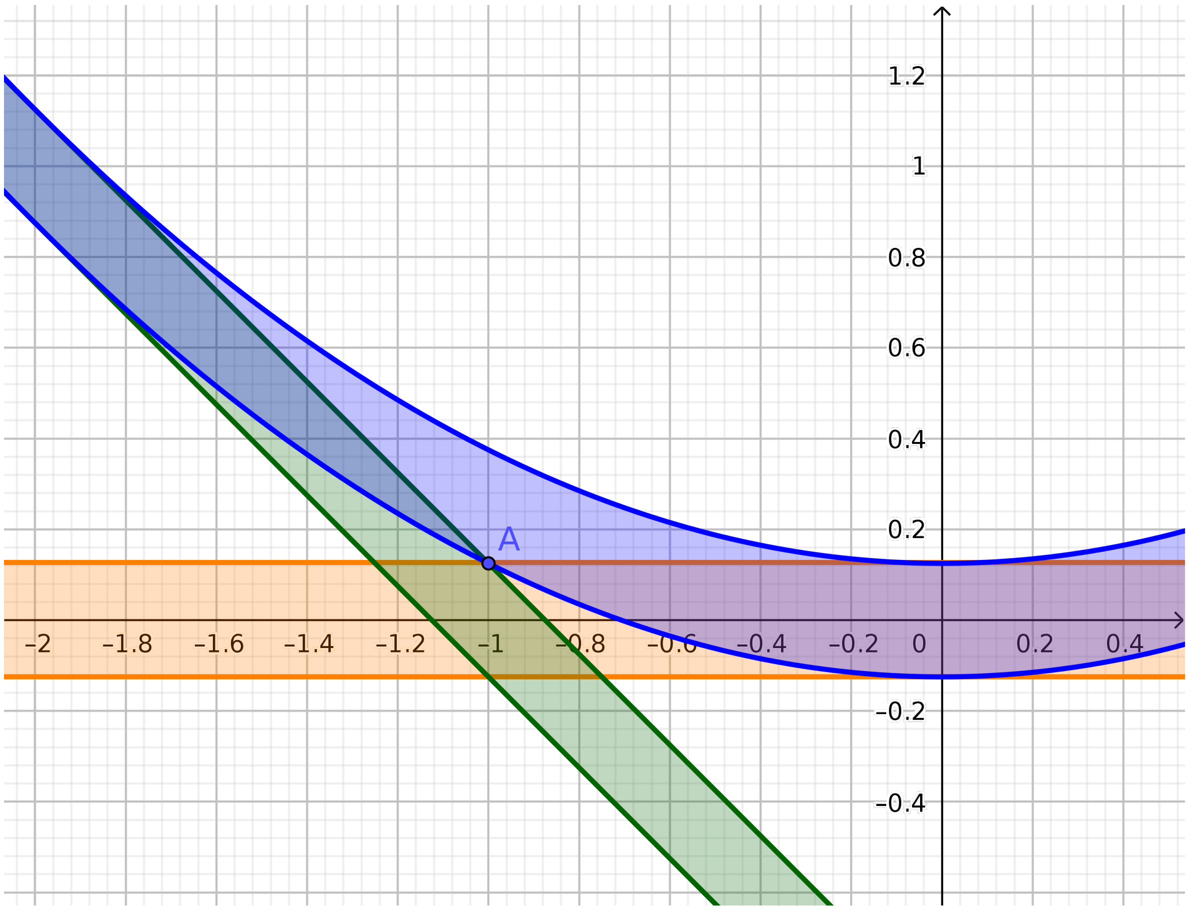
выполняется для всех значений $x \in [0;1]$. (*Р. Алишев*)

Ответ: $a=-1$, $b=\frac{1}{8}$.

Решение. Наибольшее значение функции $f(x)=|x^2+ax+b|$ на отрезке $[0;1]$ достигается в критических точках внутри отрезка или на концах. $f'(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{|x^2+ax+b|}\cdot(2x+a)$, критическими являются корни уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x=-0,5a$ В нуле и единице неравенство должно быть выполнено. Поэтому $f(0)=|b|\leqslant\frac{1}{8}$, $f(1)=|a+b+1|\leqslant\frac{1}{8}$. Отсюда несложно получить следующие ограничения на a и b: $-\frac{1}{8}\leqslant b\leqslant\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}\leqslant\frac{7}{8}+b\leqslant -a\leqslant\frac{9}{8}+b\leqslant\frac{5}{4}$, т.е. $-0,5a\in[0;1]$. Для корней уранения $x^2+ax+b=0$ исходное неравенство, очевидно, будет выполняться. Все допустимые значения параметров находим из решения системы:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{8}\leqslant b\leqslant\dfrac{1}{8} \\ |a+b+1|\leqslant\dfrac{1}{8} \\ |-\dfrac{a^2}{4}+b|\leqslant\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Построим на плоскости все точки, удовлетворяющие каждому из неравенств. По абсциссе отложим значения параметра a, по ординате — параметра b.



Только точка $(-1; 0,125)$ входит в решение каждого из неравенств. Докажем более строго, что нет других решений системы

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{1}{8} \\ -a-\frac{9}{8} \leqslant b \leqslant -a-\frac{7}{8} \\ \frac{a^2}{4}-\frac{1}{8} \leqslant b \leqslant \frac{a^2}{4}+\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Если $a^2 > 1$, то из первого и третьего неравенства получим: $b \leqslant \frac{1}{8} < \frac{a^2}{4}-\frac{1}{8} \leqslant b$, что невозможно. Если же $a^2 < 1$, то $b \leqslant -a-\frac{7}{8} < \frac{a^2}{4}-\frac{1}{8} \leqslant b$, что тоже не имеет решения. При $a^2 = 1$ из третьего неравенства сразу получим $b = \frac{1}{8}$, а затем со второго $a = -1$. ■

5. На плоскости отмечено $4n+2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половина точек покрашена в красный цвет, половина — в зеленый. Докажите, что существует такая прямая, проходящая через одну красную и одну зеленую точку, с одной стороны от которой находится ровно n красных и ровно n зеленых точек.

(*дискретная версия классической теоремы из топологии*)

Решение. Рассмотрим произвольную прямую ℓ, которая не параллельна никакой из прямых, соединяющих красные точки. Проведем такую параллельную ей прямую, что все точки будут лежать по одну ее сторону. Будем двигать эту прямую параллельно в сторону точек.

Каждый раз, когда она будет проходить через одну красную точку, количество точек с одной стороны от прямой будет уменьшаться на единицу, а с другой стороны от прямой увеличиваться на единицу. Тогда в какой-то момент прямая пройдет через такую красную точку, что по разные стороны от прямой будет поровну красных точек. Таким образом, в каждом направлении, за исключением конечного числа, у нас есть единственная прямая, проходящая через красную точку и делящая красные точки на две равные группы.

Рассмотрим теперь одну такую прямую. Для удобства изложение зафиксируем на ней направление. Пусть прямая проходит через красную точку R_1. Будем вращать ее по часовой стрелке относительно точки R_1 до тех пор, пока она не наткнется на новую красную точку.

Пусть левее этой прямой a зеленых точек, а правее — b зеленых точек. В процессе вращения будем следить за изменением разности $a-b$. Это количество меняется на единицу когда прямая проходит через зеленую точку и еще на единицу, когда прямая проходит дальше. Итак, пусть прямая наткнулась на красную точку R_2. Дальше будем вращать прямую по часовой стрелке относительно точки R_2 до тех пор, пока она не наткнется на новую красную точку R_3 и т.д..

Во все моменты времени по разные стороны от прямой будет поровну красных точек, а количество зеленых точек слева от прямой будет в некоторые моменты времени меняться на единицу. В какой-то момент прямая сделает полоборота. При этом в силу единственности прямой, делящей красные точки на две равные группы, она снова пройдет через точку R_1. Тогда это будет та самая прямая, с которой началось вращение, но направление на ней будет противоположным. Поэтому левее ее будут те зеленые точки, которые раньше были правее. Следовательно, разность $a-b$ превратилась в разность $b-a$. Значит, она поменяла знак. Но поскольку все изменения были на единицу, в какой-то момент времени эта разность оказалась равна нулю. Тогда для соответствующей этому моменту времени прямой по разные стороны от нее будет поровну зеленых точек. А поскольку мы рассматриваем исключительно прямые по разные стороны от которых поровну и красных точек, мы нашли требуемую прямую.■