ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

Ответы и решения

9 класс, вариант 1.

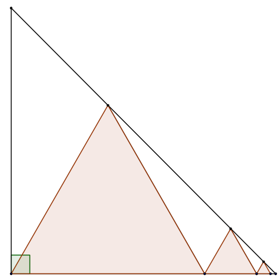
1. **(5 баллов)** Найдите количество трехзначных натуральных чисел таких, что если из него вычесть трехзначное число, записанное теми же цифрами но в обратном порядке, то получится 297.
Ответ: 60.

2. **(5 баллов)** Найдите $x_1^6 + x_2^6$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 3 = 0$.
Ответ: 419850.

3. **(7 баллов)** Таблица 13×13 заполнена числами, причем сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 2017. Какое наименьшее количество чисел необходимо изменить в таблице для того, чтобы все 26 сумм по строкам и столбцам стали различными?
Ответ: 17.

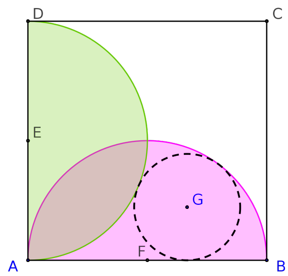
4. **(7 баллов)** Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3 : 5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2 : 1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3 : 7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?
Ответ: 29000.

5. **(8 баллов)** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 10. В него вписаны бесконечное количество правильных треугольников, как показано на рисунке: вершины лежат на гипотенузе, а основания последовательно откладываются на одном из катетов начиная из вершины прямого угла. Найдите сумму площадей правильных треугольников.
Ответ: 25.



6. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{215}.
Ответ: 211.

7. **(10 баллов)** На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ с длиной стороны 108 построены полуокружности во внутреннюю сторону. Найдите радиус окружности, которая касается стороны квадрата и полуокружностей: одной внешне, другой внутренне.
Ответ: 24.



8. **(10 баллов)** В группе 9 студентов. Они решили создать клубы так, что каждый клуб состоит из трех студентов группы и любые два клуба имеют не более одного общего члена. Какое максимальное количество клубов они могут создать?
Ответ: 12

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Прямые AM, BM, CM пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $MA_1 = MB_1 = MC_1 = 3$ и $AM + BM + CM = 43$. Найдите $AM \cdot BM \cdot CM$.

Ответ: 441.

Решение. Пусть $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$. Заметим, что $\dfrac{MC_1}{CC_1} = \dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}}$ и аналогично для двух других отрезков. Из равенства $\dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = 1$ следует $\dfrac{3}{x+3} + \dfrac{3}{y+3} + \dfrac{3}{z+3} = 1$, которая преобразуется в $xyz = 2 \cdot 3^3 + 3^2(x+y+z) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot 43$

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра c такие, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 2|x+7| + |y-4| = c, \\ |x+4| + 2|y-7| = c. \end{cases}$$

Ответ: $c = 3$.

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — единственное решение системы. Тогда $(-y_0; -x_0)$ тоже удовлетворяет условиям системы. Это решение совпадает с первой, поэтому $y_0 = -x_0$. Уравнение $2|x+7|+|x+4| = c$ имеет единственное решение $x_0 = -7$ при $c = |7-4|$, так как функция $f(x) = 2|x+7| + |x+4|$ убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$. Аналогично $2|y-7| + |y-4| \geqslant |7-4|$. Поэтому при $c = |7-4|$ равенство $f(x) + f(-y) = 2c$ выполняется только при $x = -y = -7$, т.е. система имеет единственное решение.

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

Ответы и решения

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Вася стер все числа кратные 2, потом последовательно все кратные 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Из оставшихся чисел Вася выбрал все составные и нашел их сумму. Что за число получилось?

Ответ: 7393

2. **(5 баллов)** Найдите количество десятизначных натуральных чисел, кратных трем, и в десятичной записи которых встречаются только цифры 5 или 6.

Ответ: 341

3. **(7 баллов)** Найдите наименьшее значение a такое, что среди действительных корней уравнения $x^3 - 19x + a = 0$ имеется два с разностью 1.

Ответ: -30.

4. **(7 баллов)** Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3:5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2:1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3:7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?

Ответ: 29000.

5. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

Ответ: 26

6. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11}.

Ответ: 256.

7. **(10 баллов)** Найдите сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 217^3.$$

Ответ: 282304441.

8. **(10 баллов)** В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, а на стороне AB — точка K так, что $AK : KB = 3 : 2$ и $CD : DB = 1 : 5$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей $\dfrac{S_{\triangle AOK}}{S_{\triangle ABC}}$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.45.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В треугольнике ABC проведена высота AD. Окружность касается BC в точке D, пересекает сторону AB в точках M и N, а сторону AC — в точках P и Q. Докажите, что

$$\frac{AM+AN}{AC}=\frac{AP+AQ}{AB}.$$

Решение. Обозначим за O центр окружности из условия задачи. Тогда O лежит на AD. Из точки O опустим перпендикуляры OE и OF на стороны AB и AC соответственно. Тогда точки E и F являются серединами отрезков MN и PQ соответственно, а значит $AE=\frac{1}{2}(AM+AN)$ и $AF=\frac{1}{2}(AP+AQ)$. $\angle OEB=\angle ODC=\angle OFA=90^\circ$, следовательно четырёхугольники $BEOD$ и $CDOF$ вписанные. Пусть S_1 и S_2 — их описанные окружности. Далее заметим, что точка A лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2, то есть её степень относительно S_1 равна её степени относительно S_2. Таким образом, $AE\cdot AB=AF\cdot AC$, то есть $AB(AM+AN)=AC(AP+AQ)$, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases}2(x+7)^2+(y-4)^2=c,\\(x+4)^2+2(y-7)^2=c.\end{cases}$$

Ответ: $c=6.0$.

Решение. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2\right)\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^2,$$

$$(2)\qquad \left(1+\frac{1}{2}\right)\left((x+\beta)^2+2(y-\alpha)^2\right)\geqslant\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^2.$$

А значит, для любого решения (x,y) системы выполнено

$$(3)\quad 3c\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^2+\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^2\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\beta+x+y)^2+(\alpha-\beta-(x+y))^2=$$
$$=2(\alpha-\beta)^2+2(x+y)^2\geqslant 2(\alpha-\beta)^2.$$

Следовательно, при $c<\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$ решений у системы нет.
Ежели $c=\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$, то во всех неравенствах (1)-(3) должно достигаться равенство. Следовательно $x+y=0$, числа $x+\alpha$ и $x+\beta$ должны быть разных знаков, а также

$$\frac{2(x+\alpha)^2}{(x+\beta)^2}=\frac{1}{2}.$$

Из этих условий получается, что при $c=\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$ имеется только одно решение $\left(-\frac{2\alpha+\beta}{3},\ \frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.
Замечание. Можно сразу заметить, что решение системы обладает симметрией относительно прямой $y=-x$ (два эллипса с центрами в точках $(-\alpha;\beta)$ и $(-\beta;\alpha)$). Решение будет единственно, если один из эллипсов касается этой прямой. Это выполняется, если уравнение $2(x+\alpha)^2+(x+\beta)^2=c$ имеет единственное решение. Приравняв дискриминант к нулю находим решение. https://ggbm.at/FVmUGS4Y

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Игральный кубик бросали 5 раз. Найдите вероятность того, что среди выпавших очков найдутся два одинаковых. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.91

2. **(5 баллов)** Найдите $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, где x_1, x_2 и x_3 корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 10x - 10 = 0.$$

Ответ: -87.

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $16^{x^2+y} + 16^{y^2+x} = 1$. В ответ запишите значение переменной x.

Ответ: -0.5

4. **(7 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11}.

Ответ: 256.

5. **(8 баллов)** Найдите количество способов выбрать 5 чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots, 10\}$ так, чтобы среди выбранных не было трех последовательных чисел.

Ответ: 126

6. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

Ответ: 26

7. **(10 баллов)** На мероприятие в Иннополисе приехали n школьников. Оказалось, что у любых двух незнакомых между собой школьников среди участников мероприятия имеется ровно два общих знакомых, а у любых двух знакомых нет общих знакомых. Найдите наименьшее возможное n, если известно дополнительно, что количество школьников больше дюжины.

Ответ: 16

8. **(10 баллов)** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение ABC_1D_1. Найдите отношение объемов полученных многогранников $\dfrac{V_{ABCDD_1C_1}}{V_{A_1B_1C_1D_1AB}}$, если $AB : A_1B_1 = 3$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 4.2.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** M и N середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ соответственно. Через точки M и N проведено сечение, пересекающее ребра AC и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$AP : AC = BQ : BD.$$

Решение. Пусть сечение из условия задачи пересекается с прямой BC по точке K. Из теоремы Менелая для треугольников ABC и DBC получаем

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1,$$
$$\frac{DQ}{QB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{ND} = 1.$$

Откуда получаем, что $\frac{PC}{AP} = \frac{KC}{BK} = \frac{QD}{BQ}$. Поэтому $\frac{AC}{AP} = 1 + \frac{PC}{AP} = 1 + \frac{QD}{BQ} = \frac{BD}{BQ}$, то есть $\frac{AP}{AC} = \frac{BQ}{BD}$, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 8(x+7)^4 + (y-4)^4 = c, \\ (x+4)^4 + 8(y-7)^4 = c. \end{cases}$$

Ответ: $c = 24$.

Решение. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$(1) \quad \left(\frac{1}{2}+1\right)^3 \left(8(x+\alpha)^4 + (y-\beta)^4\right) \geqslant \geqslant \left(\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2(x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right)\right)^2 \geqslant \geqslant \left(|x+\alpha| + |y-\beta|\right)^4,$$

$$(2) \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \left(8(x+\beta)^4 + (y-\alpha)^4\right) \geqslant \geqslant \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2(x+\beta)^2 + (y-\alpha)^2\right)\right)^2 \geqslant \geqslant \left(|x+\beta| + |y-\alpha|\right)^4.$$

А значит, для любого решения (x, y) системы выполнено

$$(3) \quad \frac{27}{4}c \geqslant \left(|x+\alpha| + |y-\beta|\right)^4 + \left(|x+\beta| + |y-\alpha|\right)^4 \geqslant \geqslant (\alpha-\beta+x+y)^4 + (\alpha-\beta-(x+y))^4 = = 2(\alpha-\beta)^4 + 2(x+y)^4 + 12(\alpha-\beta)^2(x+y)^2 \geqslant 2(\alpha-\beta)^4.$$

Следовательно, при $c < \frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$ решений у системы нет.
Ежели $c = \frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$, то во всех неравенствах (1)-(3) должно достигаться равенство. Следовательно $x + y = 0$, числа $x+\alpha$ и $x+\beta$ должны быть разных знаков, а также

$$\frac{|x+\alpha|}{|x+\beta|} = \frac{1}{2}.$$

Из этих условий получается, что при $c = \frac{8}{27}(\alpha-\beta)^4$ имеется только одно решение $\left(-\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.
Замечание. Можно сразу заметить, что решение системы обладает симметрией относительно прямой $y = -x$ (две замкнутые кривые с центрами в точках $(-\alpha;\beta)$ и $(-\beta;\alpha)$). Решение будет единственно, если одна из этих кривых касается этой прямой. Это выполняется, если $c = \min f(x)$, где $f(x) = 8(x+\alpha)^4 + (x+\beta)^4$. $f'(x) = 32(x+\alpha)^3 + 4(x+\beta)^3 = 0$ в точке $x_0 = -\frac{2\alpha+\beta}{3}$. Тогда $c = f(x_0)$. https://ggbm.at/FVmUGS4Y