ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

9 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же и c — что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + b/2$, $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Чему равняется в этом случае n?

Ответ: -20.

2. **(5 баллов)** Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{11}}$ на 7.

Ответ: 2

3. **(7 баллов)** За круглым столом сидят 15 человек. Разрешается любых двоих людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее количество таких перестановок надо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались соседями, но сидели в обратном порядке?

Ответ: 49.

4. **(7 баллов)** Равносторонний треугольник поворачивают относительно центра на 3°, потом на 9°, на 27°, и т.д. (на n-м шаге его поворачивают на $(3^n)^\circ$). Сколько всего разных положений будет занимать треугольник в ходе этой деятельности (включая начальное)?

Ответ: 4

5. **(8 баллов)** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

Ответ: 18

6. **(8 баллов)** В квадрате $ABCD$ со стороной 12 диагональ BD пересекает отрезки CM и CK в точках N и L соответственно (M и K – середины сторон AB и AD соответственно). Чему равна площадь четырехугольника $MNLK$?

Ответ: 30

7. **(10 баллов)** Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{624}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

Ответ: 0.96

8. **(10 баллов)** Каждое положительное рациональное число встречается в бесконечном количестве позиций в следующей последовательности:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Найдите номер позиции, в котором число $\dfrac{1}{2}$ встречается 10-ый раз.

Ответ: 426

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Окружность с центром в середине основания BC касается боковых сторон равнобедренного треугольника ABC. Касательная к этой окружности пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$BP \cdot CQ = \frac{BC^2}{4}.$$

Решение. Пусть M — середина стороны BC. PM и QM являются биссектрисами углов BPQ и CQP соответственно. Следовательно $\angle BPM = \angle QPM = \alpha$ и $\angle CQM = \angle PQM = \beta$. Также по условию $\angle ABC = \angle ACB = \gamma$. Тогда сумма улов четырёхугольника $BPQC$ равна $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Поэтому $\angle PMB = \beta$ и $\angle QMC = \alpha$. Таким образом, $\triangle PMB \sim \triangle MQC$ по трём углам. Откуда $PB/MC = BM/CQ$, то есть $BP \cdot CQ = BC^2/4$. Что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Даны различные натуральные числа a, b, c, d, для которых выполняются следующие условия: $a > d$, $ab = cd$ и $a+b+c+d = ac$. Найдите сумму всех четырёх чисел.

Ответ: 12

Решение. Из соотношений $a > d$ и $ab = cd$ имеем неравенство $b < c$.

Докажем, что одно из чисел a, c не превосходит 3. Предположим противное. Тогда имеем неравенства $\frac{ac}{2} \geqslant 2a > a + d$ и $\frac{ac}{2} \geqslant 2c > b + c$. Сложив их, получим противоречие с условием.

Итак, предположим без ограничения общности, что $a \geqslant 3$. Поскольку a натуральное, то $a \in \{1, 2, 3\}$. Кроме того, d — натуральное число, меньшее a, значит, $a \neq 1$. Разберём два случая.

Случай 1. $a = 3$. Соотношения переписываются в виде

$$3b = cd, 3 + b + c + d = 3c, 3 > d.$$

Из последнего неравенства, в частности, следует, что $(3, d) = 1$. Значит, $3 \mid c$. Поскольку все числа различны, $c \geqslant 6$. Тогда имеем цепочку неравенств

$$3 + b + c + d < 6 + b + c < 6 + 2c < 3c,$$

что противоречит условию.

Случай 2. $a = 2$. Из неравенства $a > d$ следует, что $d = 1$. Соотношения переписываются в виде $2b = c, 3 + b = c$. Единственным решением этой системы уравнений является пара $(b, c) = (3, 6)$. Находим решение $(2, 3, 6, 1)$, сумма которых равна 12.

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Число n называется дублем, если его запись в семеричной системе счисления, будучи прочитана как десятичное число, равна $2n$. Например, $51 = 102_7$. Найдите наибольший дубль.

Ответ: 315

2. **(5 баллов)** При каком a многочлены $x^4 + ax^2 + 7$ и $x^3 + ax + 7$ имеют общий корень?
Ответ: -8.

3. **(7 баллов)** На координатной плоскости нарисован многоугольник, координаты вершин которого натуральные числа. Для каждой вершины с координатами $(x; y)$ выполняются условия: $(2x + 1) \vdots y$ и $(2y + 1) \vdots x$. Какую максимальную площадь может иметь этот многоугольник?

Ответ: 20

4. **(7 баллов)** В полном графе на 10 вершинах удалили один цикл длины три. Сколько циклов длины три осталось?
Ответ: 98

5. **(8 баллов)** Пусть l — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная l и проходящая через середину K стороны AB, пересекает AC в точке E. Найти CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$.
Ответ: 5.5

6. **(8 баллов)** Обозначим через $k(N)$ наибольший нечетный делитель числа N. Найдите сумму

$$k(1010) + k(1011) + \ldots + k(2018).$$

Ответ: 1018081

7. **(10 баллов)** В правильном 19-угольнике наугад выбирают две тройки различных вершин. Какова вероятность того, что два треугольника, с вершинами в выбранных тройках, не пересекаются?

Ответ: $0,3$

8. **(10 баллов)** Треугольник расположен на клетчатой плоскости так, что все его вершины находятся в узлах. Две его стороны равны $\sqrt{41}$ и $\sqrt{85}$. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник? (Сторона клетки равна 1)

Ответ: $29,5$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены подобные равнобедренные треугольники APB, AQC и BRC. Треугольники APB и AQC построены во внешнюю сторону, а треугольник BRC — по ту же сторону от BC, что и треугольник ABC. Докажите, что четырехугольник $PAQR$ является параллелограммом.

Решение. Покажем, что $AQ \parallel PR$. Рассмотрим треугольники BPR и BAC. Заметим, что $\angle PBR = \angle ABC$, а также $BP/BR = AB/BC$, из подобия треугольников PAB и RCB. Следовательно, треугольники BPR и BAC подобны и, более того, одинаково ориентированы. Тогда $\angle(AC, PR) = \angle(BA, BP) = \angle(AC, AQ)$ (везде в равенствах подразумеваются равенства углов между прямыми). Значит, $PR \parallel AQ$. Аналогично, $QR \parallel AP$, то есть $PAQR$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$ в десятичной записи?

Ответ: 5

Решение. Рассмотрим число $4^{25} + 6$. Проверим, что оно делится на 5 и не делится на 25. Имеем

$$4^{25} + 6 \equiv (-1)^{25} + 6 \equiv 0 \pmod 5;$$
$$4^{25} \equiv 1024^5 + 6 \equiv (-1)^5 + 6 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Будем писать $5^t \mid\mid c$, если $5^t \mid c$, $5^{t+1} \nmid c$. Для произвольных целых a, b, не кратных 5, таких, что $5^k \mid\mid a - b$, $k > 0$, докажем, что $5^{k+1} \mid\mid a^5 - b^5$.

Положим $a - b = s$, $5^k \mid\mid s$. Имеем

$$a^5 - b^5 = s\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right) =$$
$$= s\left((b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4\right).$$

Раскроем скобки по биному Ньютона и рассмотрим выражение $\left((b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4\right)$ по модулю 25. Ясно, что от каждой скобки остаются лишь слагаемые, в которых s возводится в степень не более 1. Итак, имеем

$$(b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4 \equiv$$
$$\equiv 5b^4 + (4+3+2+1)b^3s \equiv$$
$$\equiv 5b^4 + 10b^3s \equiv 5b^4 \pmod{25}.$$

Таким образом,

$$5^1 \mid\mid \left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right).$$

Значит, $5^{k+1} \mid\mid a^5 - b^5$.

Итак, перейдём к решению задачи. Имеем

$$4^{5^6} + 6^{5^4} = (1025^5)^{5^4} - (-6)^{5^4}.$$

Положим $a = 1025^5$, $b = -6$. Применим доказанное нами утверждение. Получаем, что

$$5^2 \mid\mid (1025^5)^5 - (-6)^5.$$

Применив утверждение ещё 3 раза, получим, что

$$5^5 \mid\mid (1025^5)^{5^4} - (-6)^{5^4}.$$

Осталось заметить, что число из условия кратно 2^5. Итак, число заканчивается ровно на 5 нулей.

Замечание. Если воспользоваться Леммой Гензеля, то решение становится очевидным. Но доказательство леммы сложнее, чем решить эту задачу.

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Натуральное число разделили на сумму его цифр, результат — на сумму его цифр, новый результат — на сумму его цифр. В итоге получилось число 2. Найдите исходное число.

   Ответ: 2916

2. **(5 баллов)** Все различные девятизначные числа, полученные из 123456789 перестановкой цифр, записали в порядке возрастания. Какое число написано на 2018-ом месте этой последовательности?

   Ответ: 125893476

3. **(7 баллов)** Максим дважды бросил игральный кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6, и построил прямоугольник со сторонами, равными выпавшим числам. Какова вероятность, что площадь этого прямоугольника будет больше 10? Ответ округлите до сотых.

   Ответ: 0.47

4. **(7 баллов)** Сколько решений имеет уравнение $41\{x\} + 9[x] = 2018$?

   5

5. **(8 баллов)** В графе 6 вершин и 10 рёбер. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов степеней вершин этого графа? В графе нет петель и кратных ребер.

   Ответ: 76

6. **(8 баллов)** Известно, что многочлен $x^5 - 9x - 27$ делится на многочлен с целыми коэффициентами $x^3 + ax^2 + bx + c$. Найдите b.

   Ответ: 6

7. **(10 баллов)** Найдите наименьшее значение выражения

   $$4x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x + 10y + 17.$$

   Ответ: 7

8. **(10 баллов)** Треугольную пирамиду разрезали по боковым ребрам и развернули. Развертка оказалась квадратом со стороной 60. Найдите объем исходной пирамиды.

   Ответ: 9000.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Точки M и N — проекции точки P на стороны AC и BC соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DM = DN$.

Решение. Ясно, что точки C, M, P, N лежат на окружности ω с диаметром CP. Пусть B_1 — вторая точка пересечения прямой BP с ω. Докажем, что B_1, M и D лежат на одной прямой. Пусть K — точка пересечения прямых BP и AC. По теореме Менелая для треугольника ABK, достаточно показать, что $AM/MK = BB_1/B_1K$.

Пусть точка T симметрична K относительно B_1. Поскольку CB_1 перпендикулярно B_1B, то $\triangle CKT$ — равнобедренный, следовательно, $\angle CTB_1 = \angle B_1KC = \angle AKP$. Таким образом, треугольники CBT и PAK подобны по двум углам, B_1, M — основания высот этих треугольников из точек C, P, соответственно. Таким образом, $BB_1/B_1T = AM/MK$. С другой стороны, $BB_1/B_1T = BB_1/B_1K$, следовательно, $AM/MK = BB_1/B_1K$, и B_1, M и D лежат на одной прямой.

Определим точку C_1 аналогично точке B_1. Из равенства углов CAP и CBP следует равенство углов B_1PM и C_1PN, что влечёт равенство хорд $B_1M = C_1N$. Кроме того, по свойству секущих, $DM \cdot DB_1 = DN \cdot DC_1$. Но тогда $DM = DN$, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Плоскость разбита на правильные треугольники со стороной 1. Рассмотрим множество M всех возможных расстояний между вершинами этих треугольников, т.е. $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют две вершины на расстоянии x друг от друга. Докажите, что если $x \in M$ и $y \in M$, то $x \cdot y \in M$.

Решение. Заметим, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа a,b, что $x^2 = a^2 + ab + b^2$. В самом деле, пусть $x \in M$. Тогда существуют такие узлы A, B треугольной сетки, что $AB = x$. Рассмотрим пересечение O прямых, образующих сетку, содержащих точки A, B, соответственно. Обозначим $a = OA$, $b = OB$. Тогда, по теореме косинусов для треугольника AOB, имеем

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

где α — либо $60°$, либо $120°$. Таким образом,

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm ab.$$

При необходимости заменив a на $-a$, получим необходимое представление.

Далее, если x^2 представляется в таком виде, построим соответствующие точки A, B, отложив от точки O отрезок длины a по горизонтальной оси и отрезок b под углом $120°$ к горизонтальной оси. По теореме косинусов имеем $AB = a^2 + ab + b^2 = x^2$.

Осталось показать, что если x^2, y^2 представляются в виде a^2+ab+b^2 и c^2+cd+d^2, соответственно, то произведение x^2y^2 также представляется в таком виде. Предъявим искомое представление. Несложно проверить, что

$$(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) =$$
$$= (ac - bd)^2 + (ac - bd)(bc + ad + bd) + (bc + ad + bd)^2,$$

что завершает решение задачи.

Комментарий. Необходимое разложение, как и непосредственное решение задачи, несложно получается из рассмотрения кольца чисел Эйзенштейна.