



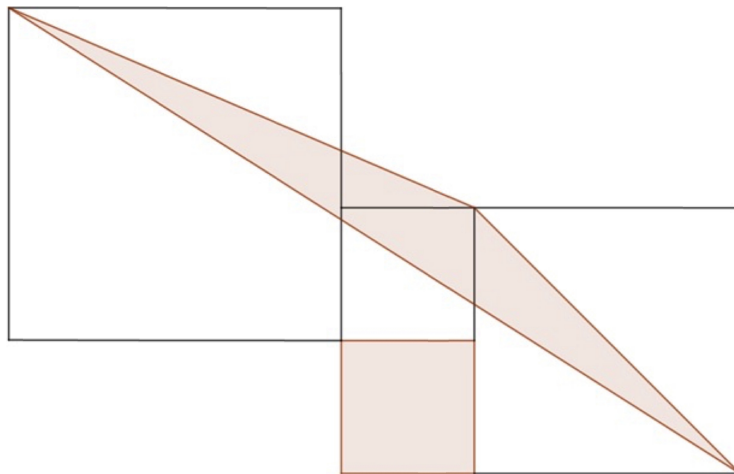
Innopolis Open

Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

9 класс, вариант 1.

- (5 баллов)** Какой остаток при делении на 19 дает число $1^{18} + 2^{18} + \dots + 2018^{18}$?
- (5 баллов)** На вечеринке рыцарей и лжецов каждого участника спросили про каждого из остальных, является тот рыцарем или лжецом. Ответов «рыцарь» всего было получено 62, а ответов «лжец» — 70. Какое наименьшее количество рыцарей могло быть на этой вечеринке, если лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду?
- (7 баллов)** Математики Аркадий, Борис и Вадим играют в глухой телефон «передавая» числа по кругу в этом порядке. Услышав число, Аркадий прибавляет к нему своё любимое, прежде чем передать дальше, в той же ситуации Борис вычитает своё любимое, а Вадим — умножает. Аркадий передал своё любимое число и услышал «400» через 2 хода. Борис передал своё любимое число и услышал «9.5» через 2 хода. Вадим передал своё любимое число и услышал «40» через 2 хода. Аркадий передал «1». Что он услышит через 2 хода?
- (7 баллов)** На рисунке изображено 4 квадрата. Площадь выделенного квадрата равна 3. Найдите площадь выделенного треугольника.

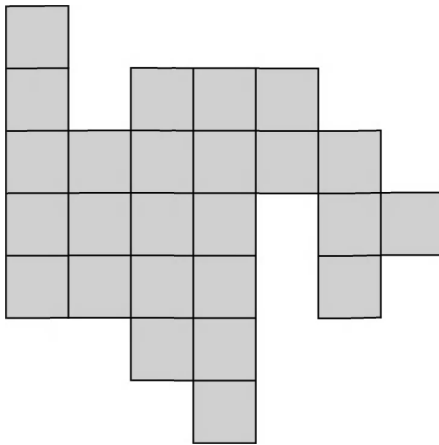


- (8 баллов)** Многочлен $x^3 - 42x^2 - 420x + c$ имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию. Найдите значение c . Если таких значений несколько, в ответ напишите наибольшее.
- (8 баллов)** Сколько существует способов разрезать прямоугольник 3×11 на 11 прямоугольников 1×3 ?
- (10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 43. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. (10 баллов) На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка E которая делит ее на отрезки $BE = 2$, $EC = 11$. Описанная окружность треугольника ABE пересекает диагональ BD второй раз в точке G . Найдите площадь треугольника AGE .

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. (20 баллов) Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



10. (20 баллов) Точка A лежит на прямой $y = -x - 11$, а точка B на параболы $y = x^2$. Какую наименьшую длину имеет отрезок AB ?



Innopolis Open

Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

10 класс, вариант 1.

- (5 баллов)** В каждой клетке таблицы 3×3 записано число. Произведение чисел в любом столбце и в любой строке равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 3. Найдите сумму чисел в трех клетках, лежащих на диагонали таблицы.
- (5 баллов)** Периметр прямоугольника с целочисленными сторонами меньше его площади на 9. Чему равна площадь?
- (7 баллов)** Математики Аркадий, Борис и Вадим играют в глухой телефон «передавая» числа по кругу в этом порядке. Услышав число, Аркадий прибавляет к нему своё любимое, прежде чем передать дальше; в той же ситуации Борис умножает на своё любимое, а Вадим — делит. Аркадий передал своё любимое число и услышал «1600» через 2 хода. Борис передал своё любимое число и услышал «80» через 2 хода. Вадим передал своё любимое число и услышал «-16000» через 2 хода. Найдите сумму любимых чисел математиков.
- (7 баллов)** На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка E которая делит ее на отрезки $BE = 1$, $EC = 10$. Серединный перпендикуляр отрезка AE пересекает диагональ BD в точке G . Найдите площадь треугольника AGE .
- (8 баллов)** Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 11. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + cd + da + 2b + 2d$.
- (8 баллов)** Сколько существует способов разрезать прямоугольник 4×16 на 16 прямоугольников 1×4 ?
- (10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 41. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?
- (10 баллов)** На горизонтальной плоскости, касаясь, лежат 4 шара радиуса $20\sqrt{2}$, их центры образуют квадрат. Сверху над центром квадрата, поверх четырех шаров положили пятый шар такого же радиуса. Найдите расстояние от его высшей точки до плоскости.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

- (20 баллов)** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла A проходит через точку C , а биссектриса угла B через точку D . Найдите значение CD^2 , если $AB = 30$, $BC = 10$ и $AD = 15$.
- (20 баллов)** Доказать, что если $ad - be = 1$, то

$$ca + c^2 + da + ac + bd \neq \sqrt{3}$$



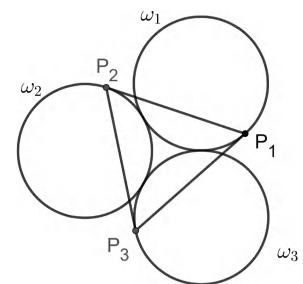
Innopolis Open

Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 1.

- (5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n , для которого сумма остатков, при делении на 29, 41, 53 соответственно, равняется n .
- (5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(3) = 4$ и $P(4) = 3$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x!$
- (7 баллов)** Решите уравнение $(x+5)^{139} + (x+5)^{138}(x+16) + (x+5)^{137}(x+16)^2 + \dots + (x+16)^{139} = 0$
- (7 баллов)** Группу с 5 юношами и 5 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.
- (8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 17-м месте, после 40 перетасовок?
- (8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 18$, $CD = \sqrt{192}$. Найдите длину отрезка DM , где M — точка пересечения медиан грани ABC .
- (10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 5. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?
- (10 баллов)** Окружности радиуса 28 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_3 , P_2P_3 касается ω_1 , P_3P_1 касается ω_2 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа. Найдите величину $a \cdot b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

- (20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ известны длины ребер $AB = 60$, $AD = 36$, $AA' = 40$. На середине ребра $A'B'$ отмечена точка E , а на середине ребра $B'C'$ — точка F . Найдите расстояние между прямыми AE и BF .
- (20 баллов)** Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
$$b|x - 4a| + |x - a^2| + 4x - 3a = 0$$
 не имеет решения.