9 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $2x^2 + 4x + 1 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два вещественных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}/_2$. Однако, если произвести перестановку первого и второго коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $4x^2 + 2x + 1 = 0$, которое уже не имеет ни одного вещественного корня.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для любой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{100}?

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из двух партий A и B (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A и B соответственно 55% и 45%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 10 баллов

В некой стране действует прогрессивный подоходный налог (по ставкам, представленным в таблице ниже). Работник получает зарплату S и хочет попросить прибавки зарплаты на 10%. При какой зарплате S это стоит делать (то есть приведёт к увеличению реального дохода работника)? (Замечание: зарплата исчисляется в целых числах)

Ежемесячный доход	Ставка налога
до 10000	5%
от 10001 до 20000	10%
от 20001 до 30000	15%
от 30001 до 40000	20%
от 40001 до 50000	25%
более 50001	30%

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий остроугольный треугольник является равносторонним.

Доказательство:

Возьмем произвольный остроугольный треугольник ΔABC и проведем биссектрису $\mathrm{B}D$ угла $\angle ABC$ (см. рис. 1). Построим срединный перпендикуляр EO к стороне AC, где O – точка пересечения с биссектрисой BD (см. рис. 2). Опустим из O перпендикуляры на стороны AB и BC; соединим O с вершинами A и C (см. рис. 3). По построению $|OA| = |OC|$. Имеем: $\Delta OFB = \Delta OGB$ по стороне OB и двум углам; следовательно, $|BF| = |BG|$ и $|OF| = |OG|$. Также имеем: $\Delta OFA = \Delta OGC$, так как эти треугольники прямоугольные и $|OF| = |OG|$, $|OA| = |OC|$; следовательно, $|FA| = |GC|$. Поэтому $|BA| = |BF| + |FA| = |BG| + |GC| = |BC|$, то есть ΔABC является равнобедренным. Утверждение теоремы, является следствием из приведённого доказательства: вместо вершины B можно было выбрать вершину A и показать, что $|AB| = |AC|$. Поэтому $|AB| = |BC| = |CA|$, что и требовалось доказать.

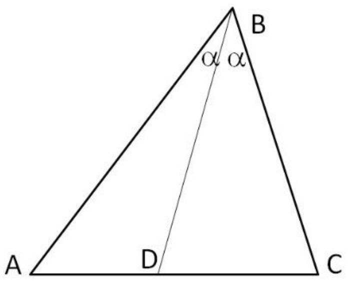

Рис. 1

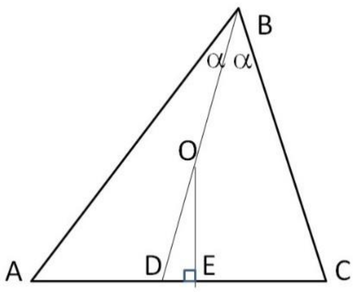

Рис. 2

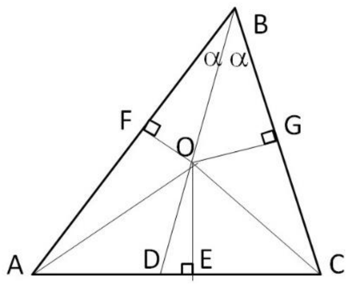

Рис. 3

10 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть являются вещественными числами.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{230}?

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 10 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длины отрезков L и L_1относятся так, как объемы кубов со сторонами L_2 и L_3 соответственно.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий тупой угол является прямым.

Доказательство:

Пусть α - произвольный тупой угол; построим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, $\angle ABC$ – прямой, а $\angle BCD = \alpha$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \alpha$, то есть прямой угол $\angle ABC$ равен тупому углу α. Теорема доказана.

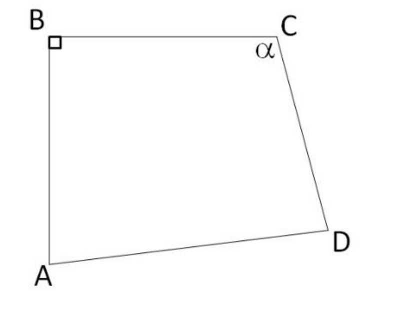

Рис. 1

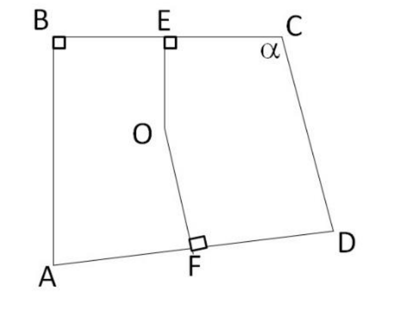

Рис. 2

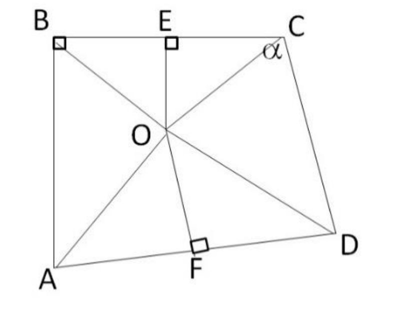

Рис. 3

11 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_{\ 2} = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_{\ 2} = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть не являются целыми числами.

Пусть $n > 1$ – натуральное число. Существуют ли попарно различные целые числа $a_0, a_1, \dots a_n$ (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p_0, p_1, \dots p_n \in \{a_0, a_1, \dots a_n\}$ уравнение $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой последовательности, если такая последовательность существует. Опишите все такие последовательности.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Что больше: число перестановок из 100 или число сочетаний из 400 по 100?

Задача 3 – стоимость 10 баллов

В неком городе с населением не менее 20000 (двадцати тысяч) человек (с правом избирательного голоса) городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей (не менее 100 человек). Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах более 50% голосов избирателей округа. В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 8 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3, длины которых – простые числа. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длина которого равна объёму прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_1, L_2 и L_3.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» и её «доказательство». Верна ли эта «теорема», нет ли ошибок в «доказательстве». Если «теорема» верна, подтвердите это (и, по возможности, приведите альтернативное доказательство). А если «теорема» не верна, то приведите контрпример, исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий четырёхугольник, котором три стороны равны и один из углов между равными сторонами – прямой, является квадратом.

Доказательство:

Предположим, противное, то есть пусть существует четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, а угол $\angle ABC$ – прямой, но в этом четырёхугольнике есть тупой угол $\angle BCD$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \angle BCD$, то есть угол $\angle ABC$ – прямой. Теорема доказана.

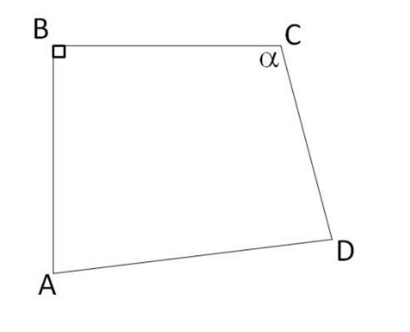

Рис. 1

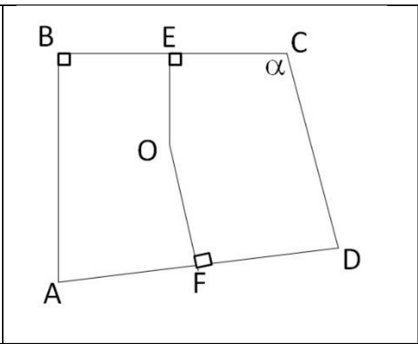

Рис. 2

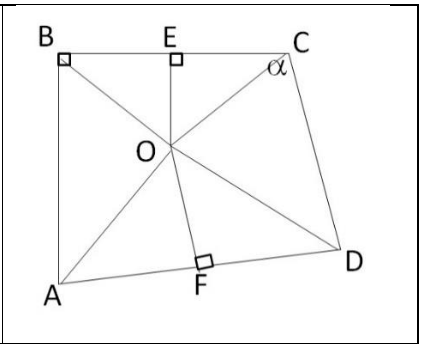

Рис. 3