9 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $2x^2 + 4x + 1 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два вещественных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}/_2$. Однако, если произвести перестановку первого и второго коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $4x^2 + 2x + 1 = 0$, которое уже не имеет ни одного вещественного корня.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для любой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Решение

Уравнение с вещественными коэффициентами $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня тогда и только тогда, когда $D = q^2 - 4pr < 0$, то есть, когда $q^2 < 4pr$. Так как p, q, r – это произвольная перестановка различных вещественных чисел a, b и c, то, следовательно, множество всех таких троек – это $\{(a, b, c) : a, b, c \in \boldsymbol{R}, a \neq b, a \neq c, b \neq c, a^2 < 4bc, b^2 < 4ac, c^2 < 4ab\}$. Это множество не является пустым, так как тройка 2, 3, 4 всем перечисленным в спецификации (описании) этого множества условиям: $2^2 < 4 \cdot 3 \cdot 4$, $3^2 < 4 \cdot 2 \cdot 4$, и $4^2 < 4 \cdot 2 \cdot 3$.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{100}?

Решение

Сначала оценим длину десятичной записи 2^{100} снизу. Имеем: $2^{10} = 1024 > 10^3$. Поэтому $2^{100} = (2^{10})^{10} > (10^3)^{10} = 10^{30}$, то есть длина десятичной записи 2^{100} – не менее 31.

Теперь оценим длину десятичной записи 2^{10} сверху. Имеем: $2^{13} = 8192 < 10^4$. Поэтому $2^{100} = 2^9 \times 2^{91} = 512 \times (2^{13})^7 < 512 \times (10^4)^7 = 512 \times 10^{28}$, то есть длина десятичной записи 2^{100} – не более 31.

Вывод: длина десятичной записи 2^{100} – ровно 31.

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из двух партий A и B (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A и B соответственно 55% и 45%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё 50% поддержка на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно ${}^{n}/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников $p\%$, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых может победить эта партия, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 55% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 55 = 110$; но так как избирательных участков в городе всего 100, то партия A может получить все 100 мест городского собрания, и, следовательно, партия B может не получить ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 45% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 45 = 90$; поэтому партия B может получить 90 мест городского собрания, и, следовательно, партия A может получить только 10 мест в городском собрании.

Партия	A	B
Максимум мест	100	90
Минимум мест	10	0

Задача 4 – стоимость 10 баллов

В некой стране действует прогрессивный подоходный налог (по ставкам, представленным в таблице ниже). Работник получает зарплату S и хочет попросить прибавки зарплаты на 10%. При какой зарплате S это стоит делать (то есть приведёт к увеличению реального дохода работника)? (Замечание: зарплата исчисляется в целых числах)

Ежемесячный доход	Ставка налога
до 10000	5%
от 10001 до 20000	10%
от 20001 до 30000	15%
от 30001 до 40000	20%
от 40001 до 50000	25%
более 50001	30%

Решение

Заметим, что прибавка зарплаты 10% – это зарплата $1.1S$. Рутинное решение – аккуратный разбор случаев. Однако, задачу можно решить без разбора случаев следующим образом.

Заметим, что каждый раз при переходе с зарплаты S со ставкой налога k на зарплату $1.1S$, когда происходит повышение ставки налога, новая ставка становится $(k + 0.05)$. Поэтому вопрос об увеличении реального дохода работника превращается в неравенство $(1-k)S < (1-k-0.05) \times (1.1S) = 1.1(1-k)S - 0.055S$; следовательно, $0.055S < 0.1(1-k)S$, то есть $0.55 < (1-k)$ или $k < 0.45$, что всегда верно в условиях задачи (так как максимальная ставка налога 30%).

Вывод: Работнику в любом случае имеет смысл просить прибавки зарплаты на 10%.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий остроугольный треугольник является равносторонним.

Доказательство:

Возьмем произвольный остроугольный треугольник ΔABC и проведем биссектрису $\mathrm{B}D$ угла $\angle ABC$ (см. рис. 1). Построим срединный перпендикуляр EO к стороне AC, где O – точка пересечения с биссектрисой BD (см. рис. 2). Опустим из O перпендикуляры на стороны AB и BC; соединим O с вершинами A и C (см. рис. 3). По построению $|OA| = |OC|$. Имеем: $\Delta OFB = \Delta OGB$ по стороне OB и двум углам; следовательно, $|BF| = |BG|$ и $|OF| = |OG|$. Также имеем: $\Delta OFA = \Delta OGC$, так как эти треугольники прямоугольные и $|OF| = |OG|$, $|OA| = |OC|$; следовательно, $|FA| = |GC|$. Поэтому $|BA| = |BF| + |FA| = |BG| + |GC| = |BC|$, то есть ΔABC является равнобедренным. Утверждение теоремы, является следствием из приведённого доказательства: вместо вершины B можно было выбрать вершину A и показать, что $|AB| = |AC|$. Поэтому $|AB| = |BC| = |CA|$, что и требовалось доказать.

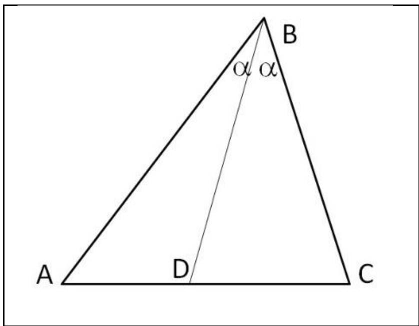


Рис. 1

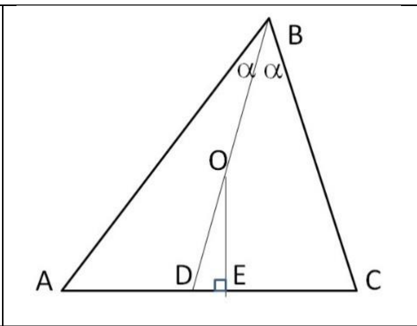


Рис. 2

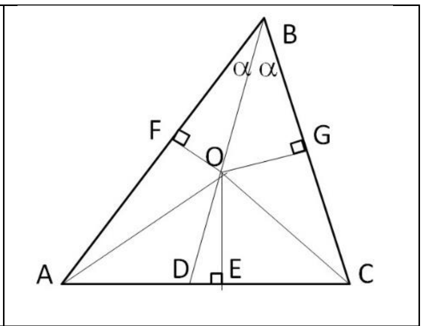


Рис. 3

Решение

На самом деле мы доказываем (методом от противного), что *в остроугольном не равнобедренном треугольнике серединный перпендикуляр к стороне и биссектриса противолежащего угла имеют точку пересечения вне треугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что наш треугольник должен быть равнобедренным.

10 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть являются вещественными числами.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Решение

Таких троек чисел a, b и c не существует. Что бы это доказать, предположим противное, что хотя бы одна такая тройка существует. Если уравнение $px^2 + qx + r = 0$ с ненулевыми целочисленными коэффициентами имеет только целочисленные корни, то (по теореме Виета) p делит r. Так как p, q, r – это любая перестановка a, b и c, то на месте p и r оказываются все комбинации пар из a, b и c, и, следовательно, каждое из этих целых чисел делит любое другое, что возможно только если $a, b, c \in \{-1, +1\}$. – Но тогда два из чисел a, b и c обязательно равны, что противоречит тому, что все числа a, b и c попарно различны.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{230}?

Решение

Сначала оценим длину десятичной записи 2^{230} снизу. Имеем: $2^{10} = 1024 > 10^3$. Поэтому $2^{230} = (2^{10})^{23} > (10^3)^{23} = 10^{69}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не менее 70.

Теперь оценим длину десятичной записи 2^{230} сверху. Имеем: $2^{13} = 8192 < 10^4$; поэтому $2^{230} = 2^9 \times 2^{221} = 512 \times (2^{13})^{17} < 512 \times (10^4)^{17} = 512 \times 10^{68}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не более 71. Но эту оценку можно улучшить: $2^{23} = 8192 \times 1024 = 8388608 < 10^7$; поэтому $2^{230} = (2^{23})^{10} < (10^7)^{10} = 10^{70}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не более 70.

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё 50% поддержка на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно $n/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников $p\%$, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых может победить эта партия, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 50% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 50 = 100$; поэтому партия A может получить все 100 мест городского собрания, и, следовательно, партии B и C могут не получить ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 30% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 30 = 60$; поэтому партия B может получить 60 мест городского собрания.

Так как по условию задачи у партии C – ровно 20% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 20 = 40$; поэтому партия B может получить 40 мест городского собрания.

Следовательно, при координации партий B и C партия A может не получить ни одного места в городском собрании.

Партия	A	B	C
Максимум мест	100	60	40
Минимум мест	0	0	0

Задача 4 – стоимость 10 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длины отрезков L и L_1относятся так, как объемы кубов со сторонами L_2 и L_3 соответственно.

Решение

Важное Замечание: для любых трёх отрезков A, B, и C с помощью циркуля и линейки можно построить такой отрезок D такой, что $D/_A = B/_C$.

Нам надо описать алгоритм построения (с циркулем и линейкой) такого отрезка L, что $L/_{L_1} = L_2^3/_{L_3^3}$, то есть такой, что $L = \frac{L_1 L_2^3}{L_3^2} = \left(\left(L_1 \times \frac{L_2}{L_3}\right) \times \frac{L_2}{L_3}\right) \times \frac{L_2}{L_3}$. Поэтому алгоритм построения отрезка L следующий:

1. построить такой отрезок X, что $\frac{X}{L_1} = \frac{L_2}{L_3}$;
2. построить такой отрезок Y, что $\frac{Y}{X} = \frac{L_2}{L_3}$;
3. построить такой отрезок Z, что $\frac{Z}{Y} = \frac{L_2}{L_3}$;

тогда Z – это и есть искомый отрезок L. (В силу Важного Замечания, все построения возможны с помощью циркуля и линейки.)

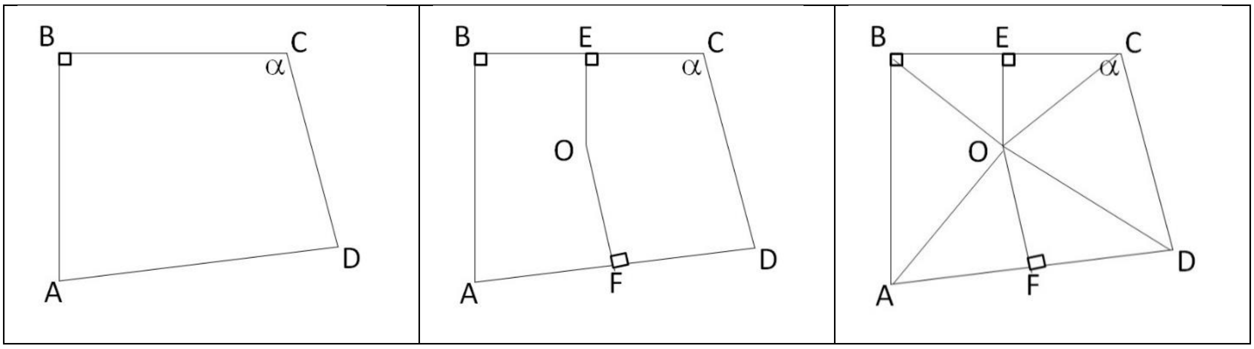
Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий тупой угол является прямым.

Доказательство:

Пусть α - произвольный тупой угол; построим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, $\angle ABC$ – прямой, а $\angle BCD = \alpha$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \alpha$, то есть прямой угол $\angle ABC$ равен тупому углу α. Теорема доказана.



Решение

На самом деле мы доказываем (методом от противного), что *в построенном четырёхугольнике серединные перпендикуляры к сторонам* BC *и* AD *имеют точку пересечения вне четырёхугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что тупой угол равен прямому.

11 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть не являются целыми числами.

Пусть $n > 1$ – натуральное число. Существуют ли попарно различные целые числа $a_0, a_1, \dots a_n$ (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p_0, p_1, \dots p_n \in \{a_0, a_1, \dots a_n\}$ уравнение $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0 = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой последовательности, если такая последовательность существует. Опишите все такие последовательности.

Решение

См. решение задачи 1 для 10 класса.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Что больше: число перестановок из 100 или число сочетаний из 400 по 100?

Решение

Оценим снизу число $100!$, равное числу перестановок из 100:

$$100! = 1 \times \dots \times 9 \times 10 \times \dots \times 91 \times \dots \times 99 \times 100 =$$

$$= (1 \times \dots \times 9) \times (10 \times \dots \times 19) \times \dots \times (90 \times \dots \times 99) \times 10^2 >$$

$$> (9!) \times (10^{10}) \times \dots \times (90^{10}) \times 10^2 = (9!) \times (1^{10} \times 10^{10}) \times \dots \times (9^{10} \times 10^{10}) \times 10^2 =$$

$$= (9!)^{11} \times 10^{92} = (362880)^{11} \times 10^{92} > (32 \times 10^4)^{11} \times 10^{92} = 2^{55} \times 10^{136} >$$

$$> 32 \times 10^{15} \times 10^{136} = 32 \times 10^{151}.$$

Оценим сверху число $\frac{400!}{100!300!}$, равное сочетаний из 400 по 100:

$$\frac{400!}{100! \times 300!} = \frac{301 \times \dots \times 400}{100!} < \frac{400^{100}}{32 \times 10^{151}} = \frac{2^{200} \times 10^{200}}{2^5 \times 10^{151}} = 2^{195} \times 10^{49} =$$

$$= (2^3)^{65} \times 10^{49} < 10^{65} \times 10^{49} = 10^{114}.$$

Так как сочетаний из 400 по 100 меньше 10^{114}, а число перестановок из 100 больше 32×10^{151}, то число перестановок из 100 больше числа сочетаний из 400 по 100.

Задача 3 – стоимость 10 баллов

В неком городе с населением не менее 20000 (двадцати тысяч) человек (с правом избирательного голоса) городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей (не менее 100 человек). Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах более 50% голосов избирателей округа. В целом по городу число сторонников партий A, B и C

соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё поддержка 50% +1 голос на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей, а потом – добавить на все (кроме одного) участки по одному избирателю (с этого выделенного участка); так как избирателей в городе не менее 20000, то на участке, где партия имеет 50% у нее не менее 100 сторонников, поэтому их хватит, что бы пополнить все участки (кроме одного фиксированного участка-донора) одни избирателем.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно $n/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников p%, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых не менее 50% сторонников этой партии, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 50% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 50 = 100$; но так как партия A должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 99 мест городского собрания, и, следовательно, одна из партий B или C сможет победить на участке-доноре партии A, а другая из этих партий не получит ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 30% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 30 = 60$; но так как партия B должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 59 мест городского собрания.

Так как по условию задачи у партии C – ровно 20% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 20 = 40$; но так как партия C должна из одного избирательного участка-донора добавить во все остальные участки по одному избирателю, то эта партия может получить 39 мест городского собрания.

Следовательно, при координации партий B и C партия A может получить только два места в городском собрании.

Партия	A	B	C
Максимум мест	99	59	39
Минимум мест	2	0	0

Задача 4 – стоимость 8 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3, длины которых – простые числа. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длина которого равна объёму прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_1, L_2 и L_3.

Решение

Надо построить отрезок L, что длина которого равна произведению длин отрезков L_1, L_2 и L_3. Так как длины L_1, L_2 и L_3 – простые числа, то надо построить отрезок, длина которого наименьшее общее кратное длин всех трёх отрезков, то есть – кратчайший отрезок, соизмеримый со всеми отрезками L_1, L_2 и L_3. Поэтому алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки) отрезка L: вдоль прямой откладываем (начиная с общей точки) копии этих отрезков до первого совпадения концов копий очередных отложенных отрезков.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» и её «доказательство». Верна ли эта «теорема», нет ли ошибок в «доказательстве». Если «теорема» верна, подтвердите это (и, по возможности, приведите альтернативное доказательство). А если «теорема» не верна, то приведите контрпример, исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий четырёхугольник, котором три стороны равны и один из углов между равными сторонами – прямой, является квадратом.

Доказательство:

Предположим, противное, то есть пусть существует четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, а угол $\angle ABC$ – прямой, но в этом четырёхугольнике есть тупой угол $\angle BCD$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \angle BCD$, то есть угол $\angle ABC$ – прямой. Теорема доказана.

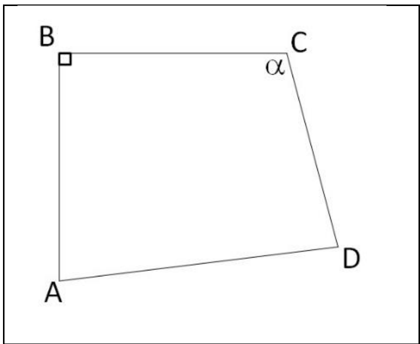


Рис. 1

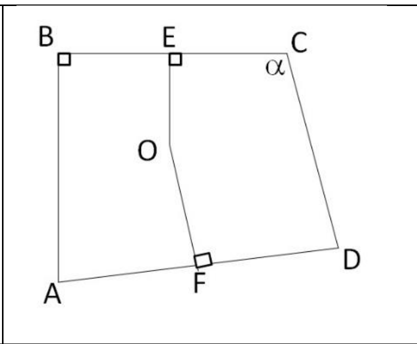


Рис. 2

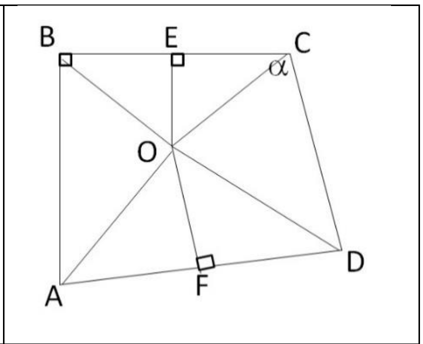


Рис. 3

Решение

«Теорема» неверна, ошибка «доказательства» - в чертеже, который предполагает, что серединные перпендикуляры к BC и AD пересекаются внутри четырёхугольника. На самом деле, мы доказываем (методом от противного), что *в построенном четырёхугольнике серединные перпендикуляры к сторонам BC и AD имеют точку пересечения вне четырёхугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что тупой угол равен прямому.