ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

9 класс, вариант 1.

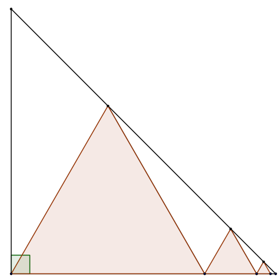
1. **(5 баллов)** Найдите количество трехзначных натуральных чисел таких, что если из него вычесть трехзначное число, записанное теми же цифрами но в обратном порядке, то получится 297.

2. **(5 баллов)** Найдите $x_1^6 + x_2^6$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 3 = 0$.

3. **(7 баллов)** Таблица 13×13 заполнена числами, причем сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 2017. Какое наименьшее количество чисел необходимо изменить в таблице для того, чтобы все 26 сумм по строкам и столбцам стали различными?

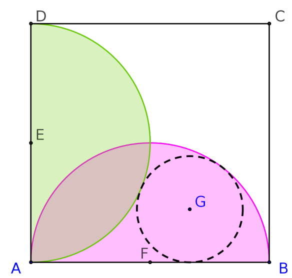
4. **(7 баллов)** Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3 : 5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2 : 1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3 : 7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?

5. **(8 баллов)** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 10. В него вписаны бесконечное количество правильных треугольников, как показано на рисунке: вершины лежат на гипотенузе, а основания последовательно откладываются на одном из катетов начиная из вершины прямого угла. Найдите сумму площадей правильных треугольников.



6. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{215}.

7. **(10 баллов)** На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ с длиной стороны 108 построены полуокружности во внутреннюю сторону. Найдите радиус окружности, которая касается стороны квадрата и полуокружностей: одной внешне, другой внутренне.



8. **(10 баллов)** В группе 9 студентов. Они решили создать клубы так, что каждый клуб состоит из трех студентов группы и любые два клуба имеют не более одного общего члена. Какое максимальное количество клубов они могут создать?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Прямые AM, BM, CM пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $MA_1 = MB_1 = MC_1 = 3$ и $AM + BM + CM = 43$. Найдите $AM \cdot BM \cdot CM$.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра c такие, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 2|x+7| + |y-4| = c, \\ |x+4| + 2|y-7| = c. \end{cases}$$

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Вася стер все числа кратные 2, потом последовательно все кратные 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Из оставшихся чисел Вася выбрал все составные и нашел их сумму. Что за число получилось?

2. **(5 баллов)** Найдите количество десятизначных натуральных чисел, кратных трем, и в десятичной записи которых встречаются только цифры 5 или 6.

3. **(7 баллов)** Найдите наименьшее значение a такое, что среди действительных корней уравнения $x^3 - 19x + a = 0$ имеется два с разностью 1.

4. **(7 баллов)** Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3 : 5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2 : 1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3 : 7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?

5. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

6. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11}.

7. **(10 баллов)** Найдите сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 217^3.$$

8. **(10 баллов)** В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, а на стороне AB — точка K так, что $AK : KB = 3 : 2$ и $CD : DB = 1 : 5$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей $\dfrac{S_{\triangle AOK}}{S_{\triangle ABC}}$. Ответ округлите до сотых.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В треугольнике ABC проведена высота AD. Окружность касается BC в точке D, пересекает сторону AB в точках M и N, а сторону AC — в точках P и Q. Докажите, что

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}.$$

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 2(x+7)^2 + (y-4)^2 = c, \\ (x+4)^2 + 2(y-7)^2 = c. \end{cases}$$

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Игральный кубик бросали 5 раз. Найдите вероятность того, что среди выпавших очков найдутся два одинаковых. Ответ округлите до сотых.

2. **(5 баллов)** Найдите $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, где x_1, x_2 и x_3 корни уравнения

$$x^3+3x^2-10x-10=0.$$

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $16^{x^2+y}+16^{y^2+x}=1$. В ответ запишите значение переменной x.

4. **(7 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n}-1$ делится на 2^{11}.

5. **(8 баллов)** Найдите количество способов выбрать 5 чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots,10\}$ так, чтобы среди выбранных не было трех последовательных чисел.

6. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=BC=17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD=7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

7. **(10 баллов)** На мероприятие в Иннополисе приехали n школьников. Оказалось, что у любых двух незнакомых между собой школьников среди участников мероприятия имеется ровно два общих знакомых, а у любых двух знакомых нет общих знакомых. Найдите наименьшее возможное n, если известно дополнительно, что количество школьников больше дюжины.

8. **(10 баллов)** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение ABC_1D_1. Найдите отношение объемов полученных многогранников $\dfrac{V_{ABCDD_1C_1}}{V_{A_1B_1C_1D_1AB}}$, если $AB:A_1B_1=3$. Ответ округлите до сотых.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** M и N середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ соответственно. Через точки M и N проведено сечение, пересекающее ребра AC и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$AP:AC=BQ:BD.$$

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases}8(x+7)^4+(y-4)^4=c,\\(x+4)^4+8(y-7)^4=c.\end{cases}$$