ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

9 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же и c — что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + b/2$, $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Чему равняется в этом случае n?

2. **(5 баллов)** Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{11}}$ на 7.

3. **(7 баллов)** За круглым столом сидят 15 человек. Разрешается любых двоих людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее количество таких перестановок надо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались соседями, но сидели в обратном порядке?

4. **(7 баллов)** Равносторонний треугольник поворачивают относительно центра на 3°, потом на 9°, на 27°, и т.д. (на n-м шаге его поворачивают на $(3^n)^\circ$). Сколько всего разных положений будет занимать треугольник в ходе этой деятельности (включая начальное)?

5. **(8 баллов)** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

6. **(8 баллов)** В квадрате $ABCD$ со стороной 12 диагональ BD пересекает отрезки CM и CK в точках N и L соответственно (M и K – середины сторон AB и AD соответственно). Чему равна площадь четырехугольника $MNLK$?

7. **(10 баллов)** Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{624}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

8. **(10 баллов)** Каждое положительное рациональное число встречается в бесконечном количестве позиций в следующей последовательности:
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$
Найдите номер позиции, в котором число $\dfrac{1}{2}$ встречается 10-ый раз.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Окружность с центром в середине основания BC касается боковых сторон равнобедренного треугольника ABC. Касательная к этой окружности пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что
$$BP \cdot CQ = \frac{BC^2}{4}.$$

10. **(20 баллов)** Даны различные натуральные числа a, b, c, d, для которых выполняются следующие условия: $a > d$, $ab = cd$ и $a + b + c + d = ac$. Найдите сумму всех четырёх чисел.

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Число n называется дублем, если его запись в семеричной системе счисления, будучи прочитана как десятичное число, равна $2n$. Например, $51 = 102_7$. Найдите наибольший дубль.

2. **(5 баллов)** При каком a многочлены $x^4 + ax^2 + 7$ и $x^3 + ax + 7$ имеют общий корень?

3. **(7 баллов)** На координатной плоскости нарисован многоугольник, координаты вершин которого натуральные числа. Для каждой вершины с координатами $(x; y)$ выполняются условия: $(2x+1) \vdots y$ и $(2y+1) \vdots x$. Какую максимальную площадь может иметь этот многоугольник?

4. **(7 баллов)** В полном графе на 10 вершинах удалили один цикл длины три. Сколько циклов длины три осталось?

5. **(8 баллов)** Пусть l — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная l и проходящая через середину K стороны AB, пересекает AC в точке E. Найти CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$.

6. **(8 баллов)** Обозначим через $k(N)$ наибольший нечетный делитель числа N. Найдите сумму

$$k(1010) + k(1011) + \ldots + k(2018).$$

7. **(10 баллов)** В правильном 19-угольнике наугад выбирают две тройки различных вершин. Какова вероятность того, что два треугольника, с вершинами в выбранных тройках, не пересекаются?

8. **(10 баллов)** Треугольник расположен на клетчатой плоскости так, что все его вершины находятся в узлах. Две его стороны равны $\sqrt{41}$ и $\sqrt{85}$. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник? (Сторона клетки равна 1)

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены подобные равнобедренные треугольники APB, AQC и BRC. Треугольники APB и AQC построены во внешнюю сторону, а треугольник BRC — по ту же сторону от BC, что и треугольник ABC. Докажите, что четырехугольник $PAQR$ является параллелограммом.

10. **(20 баллов)** На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$ в десятичной записи?

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Натуральное число разделили на сумму его цифр, результат — на сумму его цифр, новый результат — на сумму его цифр. В итоге получилось число 2. Найдите исходное число.

2. **(5 баллов)** Все различные девятизначные числа, полученные из 123456789 перестановкой цифр, записали в порядке возрастания. Какое число написано на 2018-ом месте этой последовательности?

3. **(7 баллов)** Максим дважды бросил игральный кубик, грани которого пронумерованы числами от 1 до 6, и построил прямоугольник со сторонами, равными выпавшим числам. Какова вероятность, что площадь этого прямоугольника будет больше 10? Ответ округлите до сотых.

4. **(7 баллов)** Сколько решений имеет уравнение $41\{x\} + 9[x] = 2018$?

5. **(8 баллов)** В графе 6 вершин и 10 рёбер. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов степеней вершин этого графа? В графе нет петель и кратных ребер.

6. **(8 баллов)** Известно, что многочлен $x^5 - 9x - 27$ делится на многочлен с целыми коэффициентами $x^3 + ax^2 + bx + c$. Найдите b.

7. **(10 баллов)** Найдите наименьшее значение выражения

$$4x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x + 10y + 17.$$

8. **(10 баллов)** Треугольную пирамиду разрезали по боковым ребрам и развернули. Развертка оказалась квадратом со стороной 60. Найдите объем исходной пирамиды.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Точки M и N — проекции точки P на стороны AC и BC соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DM = DN$.

10. **(20 баллов)** Плоскость разбита на правильные треугольники со стороной 1. Рассмотрим множество M всех возможных расстояний между вершинами этих треугольников, т.е. $x \in M$ тогда и только тогда, когда существуют две вершины на расстоянии x друг от друга. Докажите, что если $x \in M$ и $y \in M$, то $x \cdot y \in M$.