ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

9 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в пятеричной (семеричной, одиннацатеричной) системе счисления?

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	101313	33243	6323	6526	100412	101313	12265

8	9	10	11
12501	100343	12253	30434

2. **(5 баллов)** Решите в целых числах уравнение

$$x^2 - y^2 + 2(a+b)x + 2(a-b)y = p - 4ab \qquad p \in \mathbb{P}$$

В ответ напишите наименьшее значение переменной x.

Решение: Преобразуем наше уравнение к виду

$$(x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2) - (y^2 - 2(a-b)y + (a-b)^2) = p$$

Получаем

$$(x + a + b)^2 - (y - a + b)^2 = p$$

или

$$(x - y + 2a) \cdot (x + y + 2b) = p$$

Получаем четыре возможных варианта

$$\begin{cases} x - y + 2a = 1 \\ x + y + 2b = p \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2a = -1 \\ x + y + 2b = -p \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2a = p \\ x + y + 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2a = -p \\ x + y + 2b = -1 \end{cases}$$

Находим x и y

$$\begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{p-1}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-p-1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{1-p}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{p+1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{1-p}{2} + a - b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-p-1}{2} - a - b \\ y = \dfrac{p-1}{2} + a - b \end{cases}$$

Минимальное значение $x = -\dfrac{p+1}{2} - a - b$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	-58	-59	-59	-60	-61	-62	-64	-65	-56	-57	-119

3. **(7 баллов)** Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого цифры идут в порядке возрастания (убывания)?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у C_{10}^6 цифры идут в порядке возрастания (убывания) (любые 6 цифр из 10 образуют ровно одно нужное нам число). Тогда вероятность равна $\dfrac{C_{10}^6}{10^6} = 0.00021$. ■

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого цифры различны?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ билетов все цифры различны (на первое место цифру можно выбрать 10 способами, на вторую – 9 способами и т. д.). Тогда вероятность равна $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0.1512$. ■

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого любые а) две; б) три; в) четыре последовательные цифры различны?

Решение: Всего различных билетов 10^6 из них у а) $10 \cdot 9^5$; б) $10 \cdot 9 \cdot 8^4$; в) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^3$ любые а) две; б) три; в) четыре последовательны цифры различны. Тогда вероятность равна а) $\dfrac{10 \cdot 9^5}{10^6} = 0.59049$; б) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8^4}{10^6} = 0.36864$; в) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^3}{10^6} = 0.24696$. ■

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого найдутся хотя бы две одинаковые цифры?

Решение: Количество билетов, у которых найдутся хотя бы две одинаковые цифры, равно $10^6 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (из всех билетов нужно отнять те, у которых все цифры различны). Тогда вероятность равна $\dfrac{10^6 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0.8488$. ■

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого хотя бы одна цифра а) больше 5; б) меньше 3)?

Решение: Количество билетов, у которых хотя бы одна цифра а) больше 5; б) меньше 3, равно а) $10^6 - 6^6$; б) $10^6 - 7^6$ (из всех билетов нужно отнять те, у которых все цифры а) не превосходят 5; б) не меньше 3). Тогда вероятность равна а) $\dfrac{10^6 - 6^6}{10^6} = 0.953344$; б) $\dfrac{10^6 - 7^6}{10^6} = 0.882351$. ■

(7 баллов) Автобусный билет нумеруется шестью цифрами: от 000000 до 999999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого ровно одна цифра меньше 3?

Решение: Количество билетов, у которых ровно одна цифра меньше 3, равно $6 \cdot 3 \cdot 7^5$ (6 способами можно выбрать позицию, в которой будет стоять цифра меньшая 3, а на остальных 5 позициях цифры не меньшие 3). Тогда вероятность равна $\dfrac{6 \cdot 3 \cdot 7^5}{10^6} = 0.302526$. ■

(7 баллов) Лотерейные билеты нумеруется пятью цифрами: от 00000 до 99999. Вы покупаете один билет. Какова вероятность того, что вам достанется билет, у которого хотя бы одна цифра четная?

Решение: Количество билетов, у которых хотя бы одна цифра четная, равно $10^5 - 5^5$ (из всех билетов вычитаем те, у которых все цифры нечетные). Тогда вероятность равна $\dfrac{10^5 - 5^5}{10^5} = 0.96875$. ■

4. **(7 баллов)** Решите уравнение

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=n^2 \qquad n>1$$

Решение: Выделим полный квадрат в подкоренном выражении

$$x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=n^2$$

Корень опускается без модуля в виду того, что в ОДЗ $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$. Поэтому

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=n^2$$

Опять выделяем полный квадрат

$$\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=n^2$$

Так как $n>0$ и в ОДЗ $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}>0$, то

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=n-\frac{1}{2}$$

К тому же мы знаем, что $n>1$, поэтому возведение в квадрат будет равносильным преобразованием

$$x+\frac{1}{4}=n^2-n+\frac{1}{4}\Longrightarrow x=n^2-n \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	992	1056	930	870	1122	1190	1560	2450	3540	1980	9900

5. **(8 баллов)** Через стороны правильного $2n$-угольника проведены прямые. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

Решение: Сделаем два замечания: 1) никакие три прямые не проходят через одну точку; 2) прямые будут параллельными тогда и только тогда, когда они содержать противоположные стороны правильного $2n$-угольника.

Лемма: Пусть на плоскости проведено несколько прямых, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. Проведем еще одну прямую, которая пересечет m уже проведенных прямых в m различных точках, тогда количество частей, на которые делится плоскость этими прямыми увеличится на $m+1$.
$\triangleright$ Обозначим на нашей прямой новые точки пересечения $L_1, L_2, \ldots, L_m$ (нумерация совпадает с расположением точек на прямой). Рассмотри все части плоскости, которые образовывались до проведения новой прямой. Если часть содержит интервал $(-\infty L_1)$, $(L_1 L_2), \ldots,$ $(L_{m-1} L_m)$, $(L_m \infty)$, то она поделится на две, иначе она останется не тронутой. Следовательно, так как интервалов у нас $m+1$, то и частей станет на $m+1$ больше. $\square$

Вернемся к решению нашей задачи. Будем проводить прямые последовательно через стороны правильного $2n$-угольника. Первая сторона образует 2 части; вторая будет пересекать только первую, поэтому добавит еще 2 части; и т. д. каждая следующая будет добавлять на одну больше, чем предыдущая. Будем продолжать такую операцию вплоть до n прямой. Начиная с $n+1$ прямой у нас будут образовываться параллельные прямые: $n+1$ прямая пересечет n предыдущих; $n+2$ – пересечет $n+1$ предыдущих; и т. д. каждая следующая на одну больше, чем предыдущая. В итоге получаем такой ответ

$$2+2+3+\ldots+n+n+(n+1)+\ldots+(2n-1)=$$
$$=1+n+\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2+1 \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1251	2451	1801	801	4051	5001	2179	3873	3043	969	1059

6. **(8 баллов)** В университете Иннополис обучается $2n$ ($n > 1$) студентов. Оказалось, что любых $2n-2$ из них можно разбить на $n-1$ пару знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть среди всех студентов.

Решение: Пусть существует студент (назовем его Бобом), у которого не больше двух знакомых. Тогда рассмотрим группу из Боба и еще $2n-3$ студентов, не знакомых с Бобом. Мы нашли группу, которая противоречит условию задачи (никто не может образовывать пару с Бобом). Значит мы доказали, что у каждого студента хотя бы 3 знакомых. Тогда пар знакомств хотя бы $\dfrac{3 \cdot 2n}{2} = 3n$.

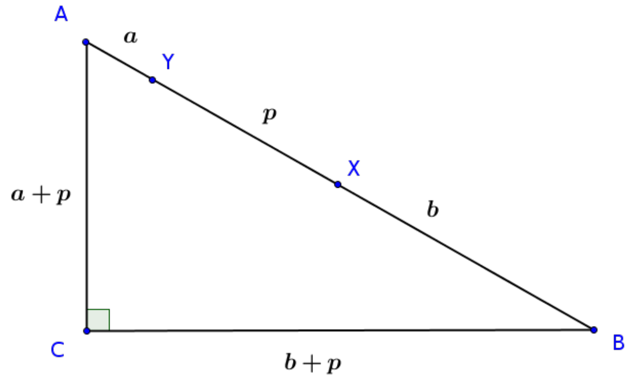
Приведем пример, когда будет ровно $3n$ знакомств. Посадим всех студентов за круглый стол и скажем, что каждый студент знаком со своими непосредственными соседями и студентом, сидящим диаметрально противоположно. Рассмотрим произвольную группу из $2n-2$ студентов. Если мы выбросим двух студентов, стоящих напротив, то оставшихся можно разбить на $n-1$ пару стоящих напротив. Пусть мы выбросим двоих, не стоящих напротив. Если на каждой из двух образованных ими дуг стоит по четному числу студентов, разобьем их на пары соседей. Если же на каждой – по нечетному числу студентов, на меньшей дуге разобьем на пары всех, кроме одного из крайних, а крайнему в пару дадим противоположного. После этого, как несложно проверить, большая дуга распадется на две из четного числа студентов, и мы сможем разбить каждую из них на пары соседей. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	153	303	228	183	213	243	273	198	258	288	318

7. **(10 баллов)** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки X и Y таким образом, что $AX = AC$ и $BY = BC$. Оказалось, что $XY = p$. Найдите произведение $AY \cdot BX$.

Решение:



По неравенству треугольника $AC + CB > AB$, поэтому расположение точек X и Y на гипотенузе будет именно таким (см. рисунок).
Обозначим $AY = a$ и $BX = b$, тогда $AC = a + p$ и $BC = b + p$. Воспользуемся теоремой Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AC^2 \Longrightarrow (a+p)^2 + (b+p)^2 = (a+b+p)^2$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены

$$2ab = p^2 \Longrightarrow ab = \frac{p^2}{2} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4.5	12.5	6.125	10.125	15.125	24.5	21.125	28.125	40.5	45.125	40.5

8. **(10 баллов)** Найдите коэффициент при x^m у многочлена

$$P(x) = (1+x) \cdot (2+x^2) \cdot (4+x^4) \cdot (8+x^8) \cdot \ldots \cdot (1024+x^{1024})$$

Решение: Заметим, что во всех скобках переменные x входят в степенях 2^k, где $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Следовательно, чтобы образовалось слагаемое x^m нужно во всех скобках взять x^{2^k}, где k – ненулевой бит в двоичном разложении m, и число 2^k, если k – нулевой бит.

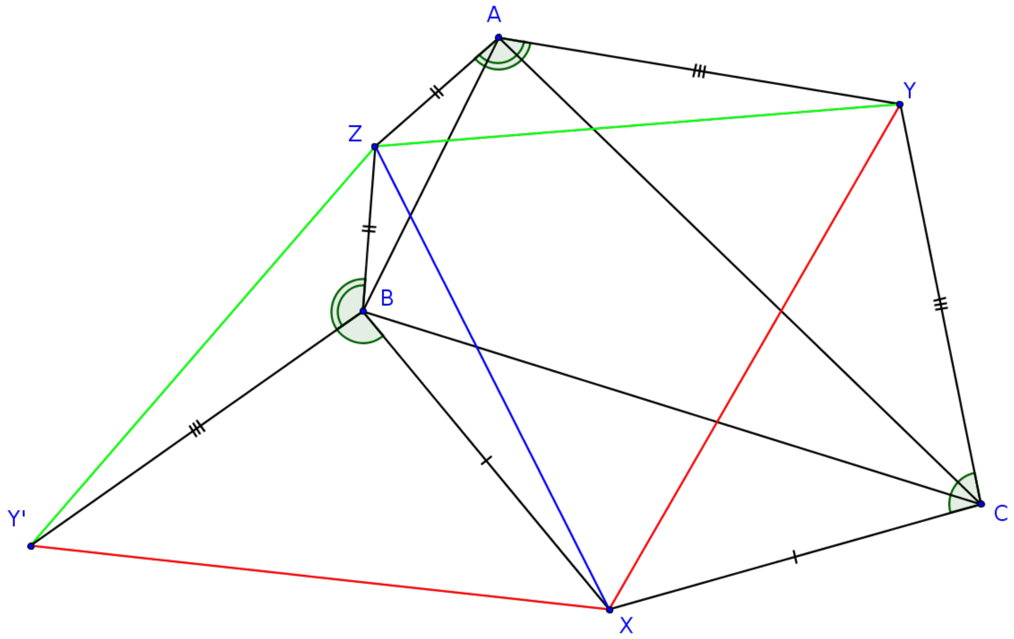
В итоге для того, чтобы найти коэффициент при x^m нужно найти двоичное одиннацатиразрядное разложение числа m (возможно с ведущими нулями). Если $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – все нулевые биты этого двоичного разложения, то ответом будет являться число $2^{b_1+b_2+\ldots+b_l}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2048	32768	65536	32768	4096	2048	512	32768	8192	40965	945

9. **(20 баллов)** На сторонах треугольника построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углами при вершине α, β и γ, где $\alpha+\beta+\gamma = 360°$. Найдите углы треугольника, образованного вершинами этих равнобедренных треугольников.

Решение:



Так как сумма внутренних углов шестиугольника равна $720°$, то

$$\angle ZAY + \angle YCX + \angle XBZ = 720° - (\angle AYC + \angle CXB + \angle BZA) =$$
$$= 720° - (\alpha+\beta+\gamma) = 720° - 360° = 360°$$

Совершим поворот вокруг точки X на $\angle CXB$ против часовой стрелки. Точка C перейдет в точку B, а точка Y – в точку Y'. Следовательно, $\triangle XCY$ будет равен $\triangle XBY'$. Откуда получаем, что $XY = XY'$ и $\angle XY'B = \angle XYC$.

Посмотрим на $\triangle ZBY'$:

$$\angle ZBY' = 360° - \angle Y'BX - \angle XBZ = 360° - \angle YCX - \angle XBZ = \angle ZAY$$

Получаем, что $\triangle ZBY' = \triangle ZAY$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $ZY' = ZY$ и $\angle BY'Z = \angle AYZ$. Осталось заметить, что $\triangle Y'ZX = \triangle YZX$ по трем сторонам, поэтому $\angle ZY'X = \angle ZYX$.

В итоге мы получили

$$\angle AYC = \angle AYZ + \angle ZYX + \angle XYC = \angle BY'Z + \angle ZYX + \angle XY'B =$$
$$= \angle ZY'X + \angle ZYX = 2\angle ZYX$$

Следовательно, $\angle ZYX = \dfrac{1}{2}\angle AYC = \dfrac{\alpha}{2}$. Аналогично доказыватся, что $\angle YXZ = \dfrac{\beta}{2}$ и $\angle XZY = \dfrac{\gamma}{2}$. ■

Ответы:

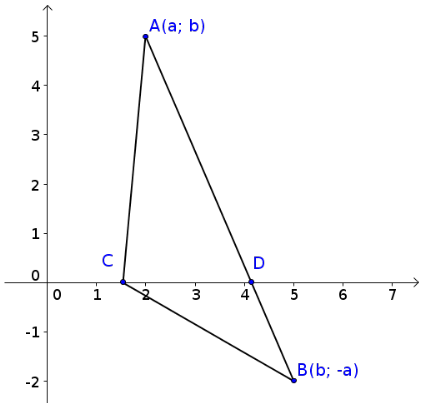
Вариант	1	2	3	4	5
Ответ	50°, 60°, 70°	50°, 55°, 75°	55°, 60°, 65°	40°, 65°, 75°	45°, 65°, 70°

6	7	8	9	10	11
40°, 60°, 80°	45°, 50°, 75°	45°, 50°, 85°	50°, 50°, 80°	40°, 70°, 70°	30°, 75°, 75°

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-b)^2 + a^2} \qquad a, b > 0$$

Решение:



Будем решать геометрическим методом. Рассмотрим три точки $A(a, b)$, $B(b, -a)$ и $C(x, 0)$. Тогда расстояние от точки C до точки A равно $\sqrt{(x-a)^2 + b^2}$, а расстояние от точки C до точки B равно $\sqrt{(x-b)^2 + a^2}$. Следовательно, наша функция есть не что иное, как

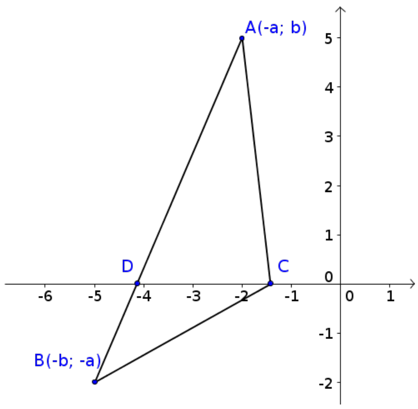
$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-b)^2 + a^2} = CA + CB$$

сумма расстояний от переменной точки C до точек A и B. Но по неравенству треугольника $CA + CB \geqslant AB$, причем равенство, когда точка C совпадает с точкой D. Получаем, что минимальное значение функции $f(x)$ совпадает с расстоянием между точками A и B, то есть равно $\sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$. ■

(20 баллов) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+b)^2 + a^2} \qquad a, b > 0$$

Решение:



Будем решать геометрическим методом. Рассмотрим три точки $A(-a, b)$, $B(-b, -a)$ и $C(x, 0)$. Тогда расстояние от точки C до точки A равно $\sqrt{(x+a)^2 + b^2}$, а расстояние от точки C до точки B равно $\sqrt{(x+b)^2 + a^2}$. Следовательно, наша функция есть не что иное, как

$$f(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b^2} + \sqrt{(x+b)^2 + a^2} = CA + CB$$

сумма расстояний от переменной точки C до точек A и B. Но по неравенству треугольника $CA + CB \geqslant AB$, причем равенство, когда точка C совпадает с точкой D. Получаем, что минимальное значение функции $f(x)$ совпадает с расстоянием между точками A и B, то есть равно $\sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	10

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

10 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в факториальной системе счисления (в ответ запишите число $d_k d_{k-1} \ldots d_2 d_1$, где $m = \sum\limits_i d_i \cdot i!$ и $0 \leqslant d_i \leqslant i$)?

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	131101	141120	243120	244000	244001	30210	410011	433311	531310	610020	1041121

2. Даны два многочлена $G(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и $H(x) = x^2 + Ax + B$. Найдите значение $G(x_1) + G(x_2)$, где x_1, x_2 – корни многочлена $H(x)$.
Ответ: $2D - AC$.

Решение: Заметим, что
$$G(x) = x^2 \cdot H(x) + Cx + D$$
поэтому
$$G(x_1) + G(x_2) = (x_1^2 \cdot H(x_1) + Cx_1 + D) + (x_2^2 \cdot H(x_2) + Cx_2 + D) = C(x_1 + x_2) + 2D$$
Осталось заметить, что по теореме Виета $x_1 + x_2 = -A$. Следовательно,
$$G(x_1) + G(x_2) = C(x_1 + c_2) + 2D = 2D - AC \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	45	50	23	-29	61	-14	-62	80	-19	70	323

3. **(7 баллов)** Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что

$$\log_2 ax + \log_2 by = \log_2(bx + ay + p_1p_2 - 1), \text{ где } p_1, p_2 \in \mathbb{P} \quad a, b > 2$$

В ответ напишите наименьшее возможное значение $x + y$.

Решение: Избавимся от логарифмов в уравнении

$$axby = bx + ay + p_1p_2 - 1$$

Преобразуем и разложим на множители

$$(ay - 1)(bx - 1) = p_1p_2$$

Так как $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, то получаем четыре возможных решения

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_1p_2 + 1}{b} \\ y = \dfrac{2}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{b} \\ y = \dfrac{p_1p_2 + 1}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p_1 + 1}{b} \\ y = \dfrac{p_2 + 1}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p_2 + 1}{b} \\ y = \dfrac{p_1 + 1}{a} \end{cases}$$

Так как $a, b > 2$ и $x, y \in \mathbb{N}$, то первые два решения точно не подходят. Из оставшихся двух выбираем то, в котором x, y натуральные и сумма $x + y$ минимальна. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	5	4	5	6	7	6	4	6	10	4	8

4. **(7 баллов)** Симметричную монету подбросили n раз. Найдите вероятность того, что не встретились два последовательных броска, в которых наблюдался орел?

Решение: Введем обозначения: О – орел, Р – решка. Пусть S_n – число последовательностей из О и Р длины n, в которых нет двух последовательных символов О (такие последовательности будем называть корректными). Очевидно, что $S_1 = 2$ и $S_2 = 3$. Найдем рекуррентную формулу для вычисления S_n при $n > 2$.
Рассмотрим всевозможные последовательности длины n оканчивающиеся на P. Очевидно, что такая последовательность будет корректной, тогда и только тогда, когда будет корректной последовательность без последнего символа Р. Но таких последовательностей ровно S_{n-1}.
Теперь рассмотрим все последовательности длины n оканчивающиеся на O. Очевидно, что такая последовательность будет корректной, тогда и только тогда, когда будет корректной последовательность без последних двух символов Р и О (предпоследний символ обязательно Р). Следовательно, таких последовательностей ровно S_{n-2}.
Получаем рекуррентную формулу для вычисления S_n:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 3, \quad S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \quad \text{при } n > 2$$

Очевидно, что это просто смещенная последовательность Фибоначчи $S_n = f_{n+2}$. Итоговая вероятность вычисляется по формуле $\dfrac{f_{n+2}}{2^n}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6
Ответ	0.140625	0.140625	0.173828125	0.173828125	0.21484375	0.21484375

7	8	9	10	11
0.265625	0.265625	0.328125	0.328125	0.265625

5. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что при всех x выполняется неравенство $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n| \geqslant m$.

Решение: $f(x)=|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n|$ – непрерывная кусочно-линейная функция. Найдем минимальное значение $f(x)$.
Если $k+1>x \geqslant k$, то первые k модулей раскрываются со знаком плюс, а остальные $n-k$ со знаком минус. Поэтому получаем

$$f(x)=(x-1)+(x-2)+\ldots+(x-k)+(k+1-x)+\ldots+(n-x)=$$
$$=(2k-n)x+\frac{n(n+1)}{2}-k(k+1)$$

Следовательно, если $2k-n<0$ на этом участке $f(x)$ убывает, а если $2k-n>0$, то $f(x)$ возрастает. А так как функция непрерывная, то минимальное значение будет достигаться в тот момент, когда будет происходить переход с убывания в возврастание. Далее возможны два случая
1) Если $n=2l$, то переход с убывания в возрастание будет на всем полуинтервале $[l,\ l+1)$. Минимальное значение будет равно

$$\min f(x)=\frac{n(n+1)}{2}-l(l+1)=l^2=\frac{n^2}{4}$$

2) Если $n=2l+1$, то переход с убывания в возрастание будет происходить в точке $x=l+1$. Минимальное значение будет равно

$$\min f(x)=(2l-n)(l+1)+\frac{n(n+1)}{2}-l(l+1)=l(l+1)=\frac{n^2-1}{4}$$

В итоге нужно найти такое минимальное натуральное n, что

$$n^2-I\{n-\text{нечетно}\} \geqslant 4m$$

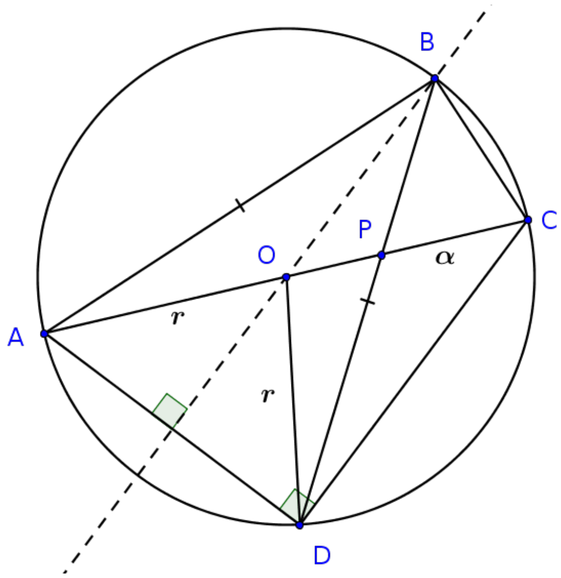
где I - индикаторная функция события. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	90	90	90	91	91	91	92	92	110	89	89

6. **(8 баллов)** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса r так, что диагональ AC – диаметр окружности. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке P. Известно, что $BD = AB$ и $PC = \alpha < r$. Найдите длину стороны CD.

Решение:



Пусть O – центр описанной окружности. Очевидно, что $AO = DO$ и $AB = DB$, поэтому точки O и B лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AD. Так как AC – диаметр, то $\angle ADC = 90°$. В итоге получаем, что $OB \parallel DC$. Следовательно, треугольник OBP подобен треугольнику CDP. В итоге получаем

$$\frac{CD}{OB} = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{CO - CP}$$

Отсюда уже можно найти длину отрезка CD

$$CD = \frac{OB \cdot CP}{CO - CP} = \frac{r\alpha}{r - \alpha} \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1.68	2.08	2.52	0.375	0.96	1.9125	0.36	2.6125	0.5	1.05	2.99

7. **(10 баллов)** Группа из m студентов называется *недружелюбной*, если любые ее два представителя не дружат друг с другом. Студент называется *суперобщительным*, если существует, по крайне мере, еще n студентов, с которыми он дружит. Какое наибольшее количество студентов может обучаться в Университете Иннополис, если известно, что нет ни одной недружелюбной группы и нет ни одного суперобщительного студента.

Решение: Построим граф, вершинами которого являются студенты, а ребрами соединяем только тех студентов, которые между собой дружат. Докажем при помощи индукции (по размеру недружелюбной группы), что в нашем графе не больше $n(m-1)$ студентов.
База $m = 2$: В нашем графе между любыми двумя вершинами должно быть ребер. Поэтому в нем как максимум n вершин (иначе бы любой студент был бы суперобщительным). База доказана.
Переход $(m-1) \longrightarrow m$: Рассмотрим произвольного студента v. Если A – множество вершин с которыми дружит v, а B – множество вершин с которыми он не дружит, то $|A| \leqslant n-1$ (иначе бы v был суперобщительным) и по предположению индукции $|B| \leqslant (m-2)n$ (если бы в множестве B нашлась недружелюбная группа из $m-1$ студента, то, добавив в нее v, мы бы получили недружелюбную группу из m студентов). Получаем, что всего вершин в графе

$$|A| + |B| + 1 \leqslant (n-1) + (m-2)n + 1 = (m-1)n$$

Переход доказан.
Осталось привести пример такого графа. Разобъем всех студентов на $m-1$ факультет по n студентов. Пусть в каждом факультете все студенты дружат друг с другом и между факультетами никто ни с кем не дружит. Тогда очевидно, что нет ни одного суперобщительного студента (степень каждой вершины $n-1$) и нет ни одной недружелюбной группы. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	135	270	255	240	225	210	195	180	165	150	306

8. **(10 баллов)** Найдите сумму действительных корней уравнения

$$2 \cdot 3^{3x} - a \cdot 3^{2x} - 3(a+4) \cdot 3^{x} + 18 = 0.$$

Решение: Сделаем замену $t = 3^x$, а так как $x \in \mathbb{R}$, то $t > 0$. Получаем следующее уравнение

$$2t^3 - at^2 - 3(a+4)t + 18 = 0$$

Очевидно, что число $t_1 = -3$ является корнем уравнения и соответствующее ему x_1 не действительное. Получаем

$$(t+3)\big(2t^2 - (a+6)t + 6\big) = 0$$

Параметр a был подобран таким образом, чтобы оставшиеся два корня t_2 и t_3 были действительными и строго больше нуля. Но тогда, используя теорему Виета, получаем

$$3^{x_2+x_3} = t_2 \cdot t_3 = \frac{6}{2} = 3$$

Следовательно, $x_2 + x_3 = 1$. ■

(10 баллов) Найдите сумму действительных корней уравнения

$$2 \cdot 4^{3x} - a \cdot 4^{2x} - 4(a+6) \cdot 4^{x} + 32 = 0.$$

Решение: Сделаем замену $t = 4^x$, а так как $x \in \mathbb{R}$, то $t > 0$. Получаем следующее уравнение

$$2t^3 - at^2 - 4(a+6)t + 32 = 0$$

Очевидно, что число $t_1 = -4$ является корнем уравнения и соответствующее ему x_1 не действительное. Получаем

$$(t+4)\big(2t^2 - (a+8)t + 8\big) = 0$$

Параметр a был подобран таким образом, чтобы оставшиеся два корня t_2 и t_3 были действительными и строго больше нуля. Но тогда, используя теорему Виета, получаем

$$4^{x_2+x_3} = t_2 \cdot t_3 = \frac{8}{2} = 4$$

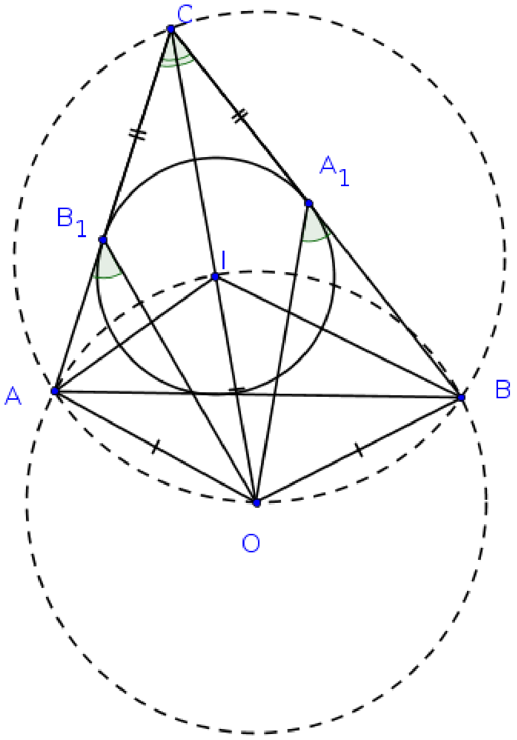
Следовательно, $x_2 + x_3 = 1$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5

9. **(20 баллов)** В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I касающаяся сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AIB. Докажите, что $\angle OB_1A = \angle OA_1B$.

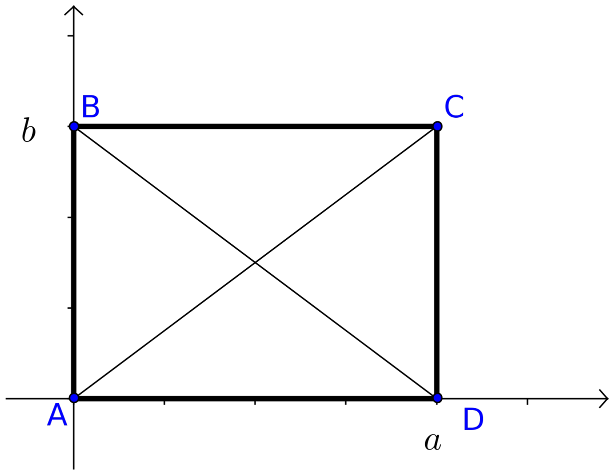
Решение:



Рассмотрим точку O' – середину дуги AB (дуга не содержит точку C), описанной окружности треугольника ABC. По лемме о трезубце получаем $O'A = O'I = O'B$. Следовательно, O' равноудаленна от всех трех вершин треугольника AIB, поэтому $O = O'$.

Так как O – середина дуги AB, то $\angle ACO = \angle BCO$. К тому же $CB_1 = CA_1$ как касательные, проведенные из одной точки. В итоге получаем, что треугольник B_1CO равен треугольнику A_1CO по двум сторонам и углу между ними. Но тогда $\angle OB_1A = \angle OA_1B$ как внешние углы равных треугольников. ■

10. **(20 баллов)** Данный прямоугольник на рисунке задайте как множество решений одного уравнения с двумя переменными.



Решение: Уравнение $|x| + |y| = 1$ задает квадрат с центром в начале координат и вершинами в единицах на осях. Все прямоугольники аффинно эквивалентны этому квадрату, поэтому уравнение этого прямоугольника ищем в виде

$$k|bx - ay| + |bx + ay - ba| = d.$$

Коэффициенты k и d выбираем так, чтобы вершины прямоугольника являлись решениями этого уравнения. Подходят $k = 1$ и $d = ba$. Ответ

$$|bx - ay| + |bx + ay - ba| = ba. \quad \blacksquare$$

Решение: Некоторые участники придумали более простое решение: уравнение

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{a - x} = 0$$

задает две прямые $x = 0$ и $x = a$, уравнение

$$\sqrt{y} \cdot \sqrt{b - y} = 0$$

задает две прямые $y = 0$ и $y = b$. Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{a - x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{b - y} = 0$$

которое задает четыре прямые $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ в ОДЗ. А область допустимых значений $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$. Следовательно, полученное уравнение задает наш прямоугольник. $\blacksquare$

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 4 декабря 2016г.

11 класс, полные решения.

1. **(5 баллов)** Чему равно число m в фибоначчиевой системе счисления? В ответ запишите максимальное число вида $\overline{f_k f_{k-1} \ldots f_3 f_2}$, где $m = \sum_{i=2}^{k} f_i \cdot F_i$, $f_i \in \{0, 1\}$, $f_k = 1$ и F_i – числа Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$).

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6
Ответ	1001000001	1001000101	1001010101	1010010101	1010010100	1010010010

7	8	9	10	11
1010100010	1010101010	1010101001	1010001001	10010100101

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ второй степени. Причем $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$ и $P(x_3) = y_3$. Найдите значение $P(x_4)$.

Решение: Воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа и найдем

$$P(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Осталось только подставить $x = x_4$ и найти требуемое значение. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2.25	28	16.6	2.2	13.2	-5.275	-3.8	-61	-17	-26	35

3. **(7 баллов)** Найдите все тройки (x, y, z) попарно взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (a+b)x + ay = bz; \\ (a+b)x^3 + ay^3 = bz^3, \end{cases} \quad \text{где } b > a \text{ взаимно простые натуральные числа.}$$

В ответ запишите наименьшее возможное значение $x + y + z$.

Решение: Перепишем систему

$$\begin{cases} a(x+y) = b(z-x); \\ a(x^3+y^3) = b(z^3-x^3); \end{cases} \implies \begin{cases} a(x+y) = b(z-x); \\ a(x+y)(x^2-xy+y^2) = b(z-x)(z^2+zx+x^2). \end{cases}$$

Так как x, y, z – натуральные числа, то $a(x+y) = b(z-x) > 0$. Поэтому во втором уравнении можно поделить обе части уравнения на одинаковое ненулевое число.

$$\begin{cases} a(x+y) = b(z-x); \\ x^2-xy+y^2 = z^2+zx+x^2; \end{cases} \implies \begin{cases} a(x+y) = b(z-x); \\ (y-z)(y+z) = x(y+z); \end{cases} \implies \begin{cases} a(x+y) = b(z-x); \\ y-z = x. \end{cases}$$

Заменяем в первом уравнении x на $y - z$

$$\begin{cases} a(2y-z) = b(2z-y); \\ x = y-z; \end{cases} \implies \begin{cases} (2a+b)y = (a+2b)z; \\ x = y-z. \end{cases}$$

Так как y и z – взаимно просты, то $y = a + 2b$ и $z = 2a + b$. Следовательно, $x = y - z = (a+2b) - (2a-b) = b - a$. А так как $b > a$ взаимно простые натуральные числа, то x, y, z попарно взаимно простые числа.

Осталось вычислить

$$x + y + z = (b-a) + (a+2b) + (2a+b) = 2a + 4b \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	34	44	38	40	38	58	46	46	50	40	46

4. **(7 баллов)** Из множества $1, 2, \ldots, 10$ выбираются равновероятно три числа (возможно одинаковых). Какова вероятность того, что сумма этих чисел равна 10?

Решение: Нужно найти сколькими способами можно решить уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

где $x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Выпишем в ряд десять единиц и поставим между ними две перегородки (в разные места). Тогда x_1 это число единиц до левой перегородки, x_2 – между левой и правой, x_3 – после правой. Так как единиц всего 10, то $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. Заметим, что мест для расположения перегородок всего 9, а нам нужно выбрать только 2. Поэтому число решений уравнения равно $C_9^2 = 36$. Тогда итоговая вероятность равна $\dfrac{36}{10^3} = 0.036$. ■

(7 баллов) Из множества $0, 1, 2, \ldots, 9$ выбираются равновероятно четыре числа (возможно одинаковых). Какова вероятность того, что сумма этих чисел равна 9?

Решение: Решается аналогично, но возникают сложности с тем, что x_i может быть равно 0. Сопоставим каждому решению $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ решение $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$, где $y_i = x_i + 1$ и $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Решений второго уравнения ровно $C_{12}^3 = 220$. Тогда итоговая вероятность равна $\dfrac{220}{10^4} = 0.022$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	0.022

5. **(8 баллов)** Числа $1,\ 2,\ \ldots, n$ расставили в некотором порядке в вершинах правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$. На каждой стороне n-угольника написали модуль разности чисел на концах этой стороны. Какое наибольшее значение принимает сумма всех чисел на сторонах?

Решение: Раскроем все модули, некоторые числа раскроятся со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. В итоге получим некоторое выражение

$$S = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \ldots \pm n \pm n$$

причем каждое число будет использоваться два раза и число плюсов должно быть ровно таким же как и число минусов. А значит сумма будет максимальна, когда большие числа беруться со знаком плюс, а маленькие со знаком минус. Возможны два случая:

1) $n = 2k$, тогда

$$S_{max} = -1 - 1 - \ldots - k - k + (k+1) + (k+1) + \ldots + 2k + 2k =$$
$$= 2k(2k+1) - 2k(k+1) = 2k^2$$

2) $n = 2k+1$, тогда

$$S_{max} = -1 - 1 - \ldots - k - k - (k+1) + (k+1) + \ldots + (2k+1) + (2k+1) =$$
$$= (2k+1)(2k+2) - 2k(k+1) - 2(k+1) = 2k(k+1) \quad \blacksquare$$

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	5202	5408	5618	5832	6050	6272	6498	6728	6962	5000	5100

6. **(8 баллов)** На первый курс Университета Иннополис было принято $2n$ абитуриента, не знакомых друг с другом. Сколько пар первокурсников необходимо перезнакомить, чтобы обязательно появилась тройка попарно знакомых?

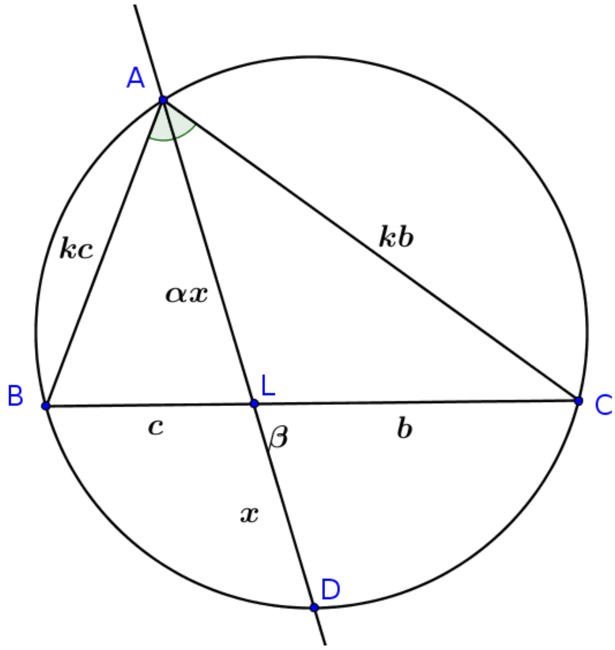
Решение: Задача решается простым применением теоремы Турана для K_3: максимальное число ребер в графе без треугольников равно n^2. Примером такого графа является полный двудольный граф $K_{n,n}$. В итоге ответом на задачу будет число $n^2 + 1$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2602	2705	2810	2917	3026	3137	3250	3365	3482	2501	3601

7. **(10 баллов)** Биссектриса угла AL треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Оказалось, что $AL : LD = \alpha$. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = \beta$.

Решение:



Так как AL – биссектриса, то

$$\frac{BA}{BL} = \frac{CA}{CL} = k \quad \text{и} \quad AL^2 = BA \cdot CA - BL \cdot CL$$

Получаем

$$\alpha^2 x^2 = k^2 bc - bc = (k^2 - 1)bc$$

Заметим также, что степень точки L равна $\alpha x^2 = bc$. Тогда, получаем

$$\alpha^2 x^2 = (k^2 - 1)bc = (k^2 - 1)\alpha x^2 \Longrightarrow \alpha = k^2 - 1 \Longrightarrow k = \sqrt{\alpha + 1}$$

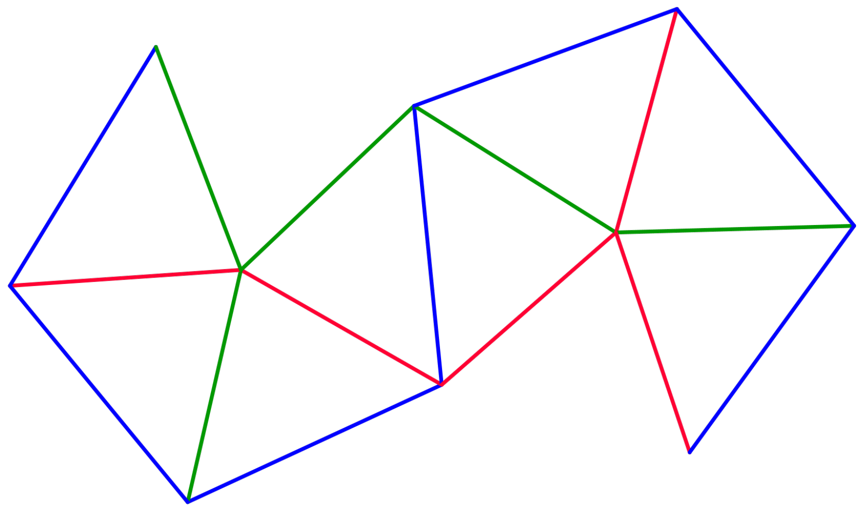
Посчитаем периметр треугольника ABC

$$P_{ABC} = kc + kb + c + b = (k+1)(c+b) = \beta(k+1) = \beta\sqrt{\alpha+1} + \beta \quad \blacksquare$$

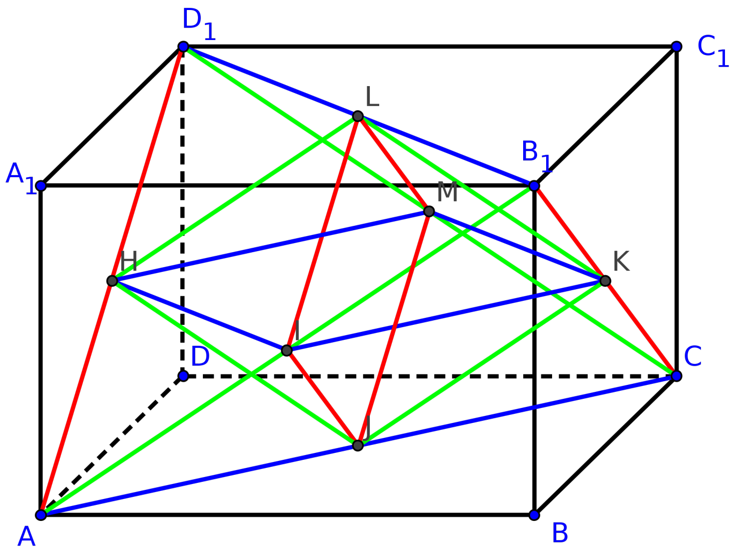
Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	4.2	4.4	6.9	7.2	7.5	10.4	10.8	11.2	8.7	12.4	12.8

8. **(10 баллов)** На рисунке изображена развертка многогранника, все грани которого равные треугольники. Равные ребра отмечены одинаковым цветом. Найдите объем этого многогранника, если стороны каждой грани имеют длины a, b, c.



Решение: Многогранник является октаэдром. Достроим его до тетраэдра, а тетраэдр до параллелепипеда как показано на рисунке.



Противоположные ребра тетраэдра равны между собой и равны удвоенным сторонам грани октаэдра. Тогда у параллелепипеда грани являются прямоугольниками, т.е. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Причем $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 3V_{ACB_1D_1} = 6V_0$, где V_0 — объем октаэдра. Пусть $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$. Из теоремы Пифагора получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2, \\ y^2 + z^2 = 4b^2, \\ x^2 + z^2 = 4c^2; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2b^2, \\ y^2 = 2b^2 + 2a^2 - 2c^2, \\ z^2 = 2c^2 + 2b^2 - 2a^2. \end{cases}$$

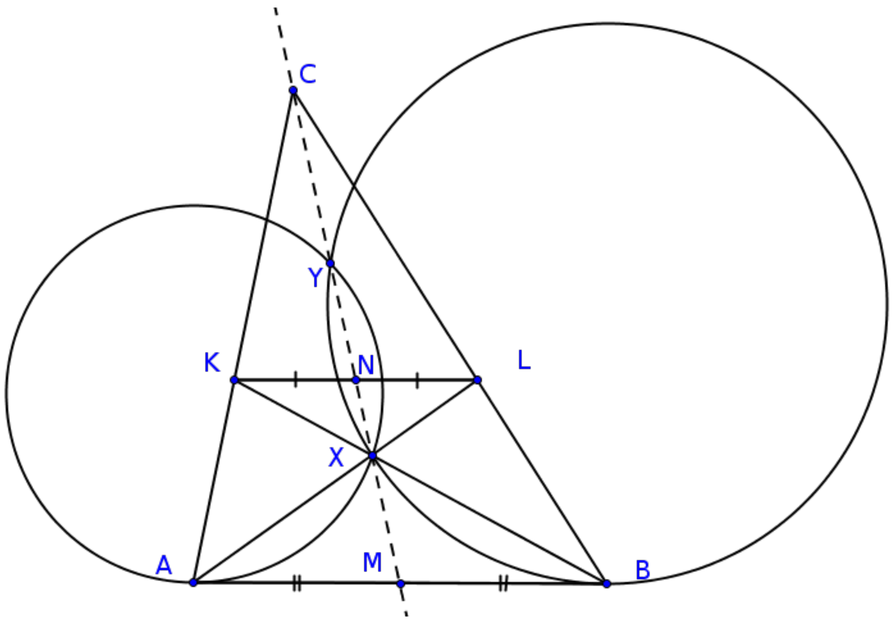
Откуда $V_0 = \dfrac{1}{6}xyz = \dfrac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$. ■

Ответы:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1440	672	1632	384	8	16	16	24	32	40	35328

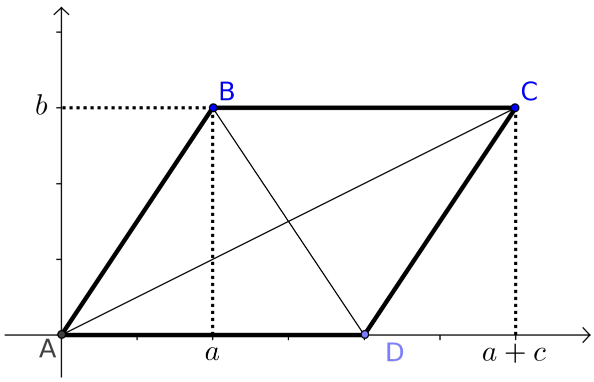
9. **(20 баллов)** В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены точки K и L таким образом, что $KL \parallel AB$. X — точка пересечения отрезков KB и AL. Окружность ω_1 проходит через точку X и касается стороны AB в точке A. Окружность ω_2 проходит через точку X и касается стороны AB в точке B. Y — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что середина отрезка AB, середина отрезка KL, точки C, X и Y лежат на одной прямой.

Решение:



Пусть M – середина отрезка AB, N – середина отрезка KL. Так как $ABLK$ – трапеция, то C, N, X и M лежат на одной прямой. Докажем, что Y тоже лежит на этой прямой. Так как MA и MB – равные касательные к окружностям ω_1 и ω_2, то точка M лежит на радикальной оси этих окружностей (то есть на прямой XY). Следовательно, точка Y лежит на прямой XM. ■

10. **(20 баллов)** Данный параллелограмм на рисунке задайте одним уравнением с двумя переменными.



Решение: Уравнение $|x| + |y| = 1$ задает квадрат с центром в начале координат и вершинами в единицах на осях. Все параллелограммы аффинно эквивалентны этому квадрату, поэтому уравнение этого параллелограмма ищем в виде

$$k|bx - (a + c)y| + |bx + (c - a)y - bc| = d.$$

Коэффициенты k и d выбираем так, чтобы вершины параллелограмма являлись решениями этого уравнения. Подходят $k = 1$ и $d = bc$. Ответ

$$|bx - (a + c)y| + |bx + (c - a)y - bc| = bc. \quad \blacksquare$$