Заключительный этап
9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовали $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010?

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$.

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим соотношениям:

a) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n?

5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0^\circ, 360^\circ]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

III Открытая олимпиада Университета Иннополис по математике

Заключительный этап
9 класс

1. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовали $2n$ парней и n девушек. К концу турнира оказалось, что число матчей, выигранных девушками, в $\frac{5}{4}$ раз больше чем число матчей, выигранных парнями (ничьих быть не могло). Докажите, что число участников турнира делится на 9.

2. Можно ли в слове ИННОПОЛИС заменить буквы цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными) так, чтобы полученное число делилось на 1010?

3. Точка M – середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BCA = \angle ACD$ и $\angle CDA = \angle BAC$. Докажите, что $\angle BCM = \angle ABD$.

4. Тройки натуральных чисел (a_i, b_i, c_i), где $i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют следующим соотношениям:

a) $a_i + b_i + c_i = 2017$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ и $c_i \neq c_j$.

Чему равно максимально возможное значение n?

5. Найдите все значения угла α из промежутка $[0^\circ, 360^\circ]$ такие, что система

$$\begin{cases} y^3 \geqslant 3x^2y, \\ (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Заключительный этап
10 класс

1. В мешке находятся 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

2. В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

3. Найдите все натуральные числа a и b такие, что
$$a^3 - b^3 = 633p,$$
где p — некоторое простое число.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 - 6x + 8 - a)(x - a^2 + 6a - 8) = 0$$
имеет ровно два различных действительных корня.

5. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке K. На перпендикуляре к отрезку BC в точке B взята точка L такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку BC в точке C взята точка M такая, что $AM = CM$. Докажите, что K, L и M лежат на одной прямой.

III Открытая олимпиада Университета Иннополис по математике

Заключительный этап
10 класс

1. В мешке находятся 20 шариков трех цветов: белые, черные и красные. Каждого цвета был хотя бы один шарик. Оказалось, что если удвоить число белых шариков в мешке, то вероятность достать белый шарик станет на $\frac{1}{5}$ меньше чем первоначальная вероятность достать красный шарик (до удвоения белых). Найдите сколько было шариков каждого цвета.

2. В зимнюю школу приехало всего 40 девочек. У каждой из них есть чётное число подруг среди других приехавших. Выяснилось, что всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили подруги. После этого две подруги, жившие в одной комнате, поссорились. Верно ли, что по-прежнему всех девочек можно расселить по двое так, чтобы в каждой комнате жили (непоссорившиеся) подруги?

3. Найдите все натуральные числа a и b такие, что
$$a^3 - b^3 = 633p,$$
где p — некоторое простое число.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$(x^2 - 6x + 8 - a)(x - a^2 + 6a - 8) = 0$$
имеет ровно два различных действительных корня.

5. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке K. На перпендикуляре к отрезку BC в точке B взята точка L такая, что $AL = BL$. На перпендикуляре к отрезку BC в точке C взята точка M такая, что $AM = CM$. Докажите, что K, L и M лежат на одной прямой.

Заключительный этап
11 класс

1. Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.

2. Пусть $f(x) = x^2+6x+6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{2017\text{ раз}}(x)\dots)) = 2017.$$

3. Какое наименьшее количество клеток доски 3×2016 можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка?

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\sqrt{6x - x^2 - 4} + a - 2)((a - 2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

5. Медианы AM_a, BM_b и CM_c треугольника ABC пересекаются в точке M. Окружность ω_a проходит через середину отрезка AM и касается стороны BC в точке M_a. Аналогично окружность ω_b проходит через середину отрезка BM и касается стороны CA в точке M_b. Пусть X и Y – точки пересечения окружностей ω_a и ω_b. Докажите, что точки X, Y и M_c лежат на одной прямой.

III Открытая олимпиада Университета Иннополис по математике

Заключительный этап
11 класс

1. Докажите, что из любой бесконечной в обе стороны целочисленной арифметической прогрессии можно выделить бесконечную целочисленную геометрическую прогрессию.

2. Пусть $f(x) = x^2+6x+6$. Решите уравнение в действительных числах

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{2017\text{ раз}}(x)\dots)) = 2017.$$

3. Какое наименьшее количество клеток доски 3×2016 можно закрасить так, чтобы у каждой клетки была соседняя по стороне закрашенная клетка?

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\sqrt{6x - x^2 - 4} + a - 2)((a - 2)x - 3a + 4) = 0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

5. Медианы AM_a, BM_b и CM_c треугольника ABC пересекаются в точке M. Окружность ω_a проходит через середину отрезка AM и касается стороны BC в точке M_a. Аналогично окружность ω_b проходит через середину отрезка BM и касается стороны CA в точке M_b. Пусть X и Y – точки пересечения окружностей ω_a и ω_b. Докажите, что точки X, Y и M_c лежат на одной прямой.