Заочная вступительная работа
10 класс

1. Найдите все пары простых чисел p и q, меньших 100, такие, что $p+4$, $p+10$, $q+6$, $q+10$ и $p+q+1$ также простые числа.

2. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$\max\{x, y\} \cdot \max\{z, d\} = \min\{x, z\} \cdot \min\{y, 2d\}$$

при фиксированном натуральном d?

3. Даны неотрицательные действительные числа a, b и c такие, что $a+b+c+2 = abc$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geqslant 2.$$

4. В лагерь приехали 100 школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, чтобы в каждой комнате все школьники были знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

5. На основаниях сторонах AB и CD ($AB > CD$) трапеции $ABCD$ отмечены точки X и Y такие, что $AX/XB = DY/YC$. На отрезке XY отмечены две точки P и Q, что $\angle APB = \angle DCB$ и $\angle DQC = \angle ABC$. Докажите, что точки B, C, P и Q лежат на одной окружности.

6. Докажите, что существует такое число N, что при всех натуральных $n > N$ наименьший простой делитель числа $(n!)^n + 1$ превосходит $n + 2017$.