

Заочная вступительная работа

8 класс

1. В комнате было несколько (более одного) человек. Один сказал: «На улице сегодня жарко! Пойду-ка я искупаюсь,» – и ушел. После этого каждые 15 минут кто-то уходил, сказав на прощание: «Все, кто ушел до меня, перед уходом солгали,» пока комната не опустела. Сколько человек, уходя, сказали правду?

2. Для действительных чисел $0 \leq a, b, c \leq 1$ докажите неравенство

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a+b+c}{abc+1}.$$

Когда достигается равенство?

3. Найдите все простые p и q такие, что

$$p + p^2 + p^4 - q - q^2 - q^4 = 83805.$$

4. На клетчатую доску 7×7 неизвестным образом ставят корабль 2×2 . Какое наименьшее количество датчиков обнаружения нужно поставить на доску так, чтобы однозначно определить расположение корабля? (Датчик ставится в клетку и показывает, занята клетка кораблём или нет, и ставится до появления корабля.)

5. В треугольнике ABC стороны соотносятся $AB + AC = 2BC$. Точки P и Q середины AB и AC соответственно. Докажите, что биссектрисы углов BPQ и CQP пересекаются на стороне BC .

6. В школу олимпиадной подготовки приехали школьники-математики. Среди них есть школьники, которые хотят разыграть других. Оказалось, что наидлиннейшая цепочка, в которой первый математик хочет разыграть второго, второй – третьего и так далее, состоит из 6 школьников. Докажите, что всех математиков можно так разбить на шесть отрядов, чтобы в каждом отряде никто никого не хотел разыграть.