

Заочная вступительная работа

9 класс

1. Известно, что для $a, b \in \mathbb{N}$ число $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ – рационально. Докажите, что \sqrt{a} и \sqrt{b} – рациональны.
2. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья – рыцари», либо фразу «Все мои друзья – лжецы», причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой – лжец.

3. Для действительных чисел $0 \leq a, b, c \leq 1$ докажите неравенство

$$\frac{a}{bc+2} + \frac{b}{ca+2} + \frac{c}{ab+2} \leq 1.$$

Когда достигается равенство?

4. Азалия и Камалия играют в следующую игру. На доске выписаны числа $0, 1, 2, \dots, 1024$. Первым своим ходом Азалия зачёркивает 512 чисел (по своему выбору), затем Камалия зачёркивает 256 из оставшихся, затем снова Азалия зачёркивает 128 чисел и т.д. На десятом шагу Камалия зачёркивает одно число; и на доске остаются два числа. После этого она платит Азалии разницу между этими числами. Сколько уплатит Камалия, если они обе будут играть наилучшим образом?
5. В треугольнике ABC провели медиану AM . Точки I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников $AI_B B$ и $AI_C C$ (отличная от точки A) лежит на прямой AM .
6. Решите уравнение в целых числах $n^3 + 3 = 4m(m + 1)$